解答例

STEP I 2016、第 8 問

純粋数学 ・ 母関数

> **STEP I 2016、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q8

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.4 節「**関数としての数列**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/generating-functions.html

鍵となる考え方

母関数（generating function）は数列全体を一つの関数にまとめたものであり、数列に対する操作は関数に対する代数的な計算に置き換わる。小問 (i) では、$1-x$ の負のべきに対する二項級数（binomial series）から必要な係数が得られ、すでに知っている数列を組み合わせて n^2 を作る。小問 (ii) では、漸化式（recurrence）に x^n を掛けて和をとることで、f についての方程式に変換する。数列の添字をずらすことは、その母関数に x を掛けることと同じなのである。

解答

小問 (i)

指数 -2 の二項級数により、

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 0} \binom{-2}{n} (-x)^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n,$$

となる。$\binom{-2}{n}(-1)^n = \frac{2\cdot 3\cdots(n+1)}{n!} = n+1$ だからである。x を掛けると

$$x(1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} nx^n,$$

となる。ここで和の添字をつけ直したが、$n=0$ を含めても差し支えない（その項は 0 である）。したがって、$u_n = n$ の母関数は $x(1-x)^{-2}$ であり、題意は示された。

同様に、指数 -3 のとき

$$\binom{-3}{n}(-1)^n = \frac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

であるから、

$$(1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

x を掛けて先ほどと同様に添字をつけ直すと、

$$x(1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 0} \frac{n(n+1)}{2}x^n,$$

となるので、数列は $u_n = \frac{1}{2}n(n+1)$、すなわち $0, 1, 3, 6, 10, \ldots$ であり、三角数（triangular numbers）である。

考えてみよう すでに知っている二つの数列から、どうすれば n^2 を作れるか？

母関数は線形である。すなわち、u_n と v_n の母関数がそれぞれ f と g ならば、$\alpha u_n + \beta v_n$ の母関数は $\alpha \mathrm{f} + \beta \mathrm{g}$ である。

$$n^2 = 2\cdot \tfrac{1}{2}n(n+1) - n,$$

であるから、$u_n = n^2$ の母関数は

$$\frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x - x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

である。

小問 (ii)(a)

各 $n \geq 1$ に対して $u_n x^n = k u_{n-1} x^n$ が成り立つ。すべての $n \geq 1$ について和をとると

$$\sum_{n\geq 1} u_n x^n = kx \sum_{n\geq 1} u_{n-1} x^{n-1}$$
$$\mathrm{f}(x) - u_0 = kx\,\mathrm{f}(x),$$

となる。左辺の和は $\mathrm{f}(x)$ から定数項を除いたものであり、右辺の和は $m = n-1$ とおけば $\sum_{m\geq 0} u_m x^m = \mathrm{f}(x)$ だからである。$u_0 = a$ であるから、これは $\mathrm{f}(x) = a + kx\,\mathrm{f}(x)$ となり、題意は示された。よって

$$\mathrm{f}(x) = \frac{a}{1-kx}.$$

（確認として、展開すると $a + akx + ak^2x^2 + \cdots$ となり、確かに $u_n = ak^n$ である。）

小問 (ii)(b)

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ に x^n を掛けて $n \geq 2$ について和をとる（漸化式は $n = 2$ からしか成り立たないので、ここから始めなければならない）：

$$\sum_{n\geq 2} u_n x^n = x \sum_{n\geq 2} u_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geq 2} u_{n-2} x^{n-2}.$$

考えてみよう これら三つの和のそれぞれで、f のどの項が欠けているか？

左辺には $u_0 + u_1 x$ の項が欠けている。右辺の第一の和は $u_1 x + u_2 x^2 + \cdots$ にわたるので、欠けているのは u_0 だけである。第二の和は $\mathrm{f}(x)$ 全体である。したがって

$$\mathrm{f}(x) - u_0 - u_1 x = x\big(\mathrm{f}(x) - u_0\big) + x^2\,\mathrm{f}(x).$$

$u_0 = 0$、$u_1 = 1$ とすると、これは $\mathrm{f}(x) - x = x\,\mathrm{f}(x) + x^2\,\mathrm{f}(x)$ となるので、

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

これはフィボナッチ数（Fibonacci numbers）$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ の母関数である。

検算

- $x(1+x)(1-x)^{-3} = (x + x^2)(1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots)$ を展開すると $x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots$ となり、期待どおり平方数が得られる。
- x を $1 - x - x^2$ で割る筆算を行うと $x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots$ が得られる。
- $x = 0.1$ のとき、和 $\sum n^2 (0.1)^n$ と $0.11/0.9^3 = 0.150891\ldots$ は一致し、フィボナッチ数に対する $\sum u_n (0.1)^n$ は $0.1/0.89 = 10/89 = 0.112359\ldots$ と一致する。これらは、問題中のすべての母関数の最初の 30 個の係数とともに、コンピュータで確認した。

よくある間違い

- 負の指数に対する二項係数を誤ること。$\binom{-r}{n}$ と $(-x)^n$ から生じる符号は打ち消し合うので、係数はすべて正である。
- (ii)(b) で、漸化式が成り立たない $n = 0$ や $n = 1$ から和をとってしまうこと、あるいは初項 u_0 と $u_1 x$ を引き忘れること。
- 三角数を $\frac{1}{2}n(n-1)$ と書いてしまうこと。$u_1 = 1$ を確かめよ。

STEP のその先へ

$\phi, \psi = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ として $1 - x - x^2 = (1 - \phi x)(1 - \psi x)$ と因数分解し、部分分数分解（partial fractions）と小問 (ii)(a) を組み合わせると、ビネの公式（Binet's formula）$u_n = (\phi^n - \psi^n)/\sqrt{5}$ が得られる。同じ方法で定数係数の線形漸化式はどれでも解くことができ、母関数は組合せ論や確率論において中心的な道具である（確率論では確率母関数（probability generating function）となる）。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は確率論の側面を展開している。Wilf の *generatingfunctionology*（母関数論）は、組合せ論の側面を扱った、生き生きとした本であり、無料で入手できる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。