解答例

STEP I 2016、第 6 問

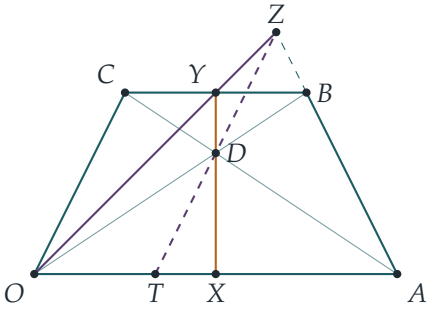
純粋数学 ・ ベクトルと図形

> **STEP I 2016、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q6

鍵となる考え方

図中のどの点も 2 直線の交点であるから、各直線をベクトル表示して等置すればよい。$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行でないので、任意のベクトルは $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ の形にただ一通りに表せる。したがって、同じ点を表す 2 つの式を等置すれば、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の係数（coefficient）をそれぞれ別々に比較できる。終始 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を基底（basis）として計算すれば、どの段階も短い 2 本の 1 次方程式で済む。

解答



c と x の形

CB は OA に平行であるから、ベクトル $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ のスカラー倍（scalar multiple）であり、$\mathbf{c}-\mathbf{b}=k\mathbf{a}$ とおける。よって $\mathbf{c}=k\mathbf{a}+\mathbf{b}$ である。四角形（quadrilateral）を $O\to A\to B\to C$ の順に回るとき、辺 BC は OA と逆向きでなければならない（同じ向きであれば、辺 AB と辺 CO が交わり、$OABC$ はまともな四角形にならない）。また

$C \neq B$ である。したがって

$$k < 0.$$

負の値であれば何でもよく、$k = -1$ のときが平行四辺形（parallelogram）である。

X は OA 上にあるから、$\mathbf{x}$ は $\mathbf{a}$ の実数倍であり、$\mathbf{x} = m\mathbf{a}$ とおける。X が O と A の間（端点を除く）にあることから

$$0 < m < 1.$$

また、O, A, B は同一直線上（collinear）にないので、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行でない。

点 Z

D を求める。 OB 上の点は $\lambda\mathbf{b}$ と表され、AC 上の点は

$$\mathbf{a} + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (1 - \mu + \mu k)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}.$$

と表される。係数を比較すると、$\lambda = \mu$ かつ $1 - \mu(1 - k) = 0$ である。$k < 0$ より $1 - k > 0$ であるから $\mu = \frac{1}{1-k}$ となり、

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{b}}{1 - k}.$$

Y を求める。 BC 上の点は $\mathbf{b} + t\mathbf{a}$ と表される。XD 上の点は

$$m\mathbf{a} + s(\mathbf{d} - m\mathbf{a}) = m(1 - s)\mathbf{a} + \frac{s}{1 - k}\mathbf{b}.$$

と表される。$\mathbf{b}$ の係数から $s = 1 - k$ であり、このとき $\mathbf{a}$ の係数は $m(1 - (1 - k)) = mk$ となる。よって

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} + mk\,\mathbf{a}.$$

Z を求める。 OY 上の点は $\rho(\mathbf{b} + mk\mathbf{a})$、$AB$ 上の点は $\mathbf{a} + \sigma(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - \sigma)\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$ と表される。係数を比較すると $\rho = \sigma$ かつ $\rho mk = 1 - \sigma$ であるから、$\rho(mk + 1) = 1$ である。$mk + 1 \neq 0$ であれば

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{b} + mk\,\mathbf{a}}{mk + 1},$$

となり、示すべき式が得られた。（$mk = -1$ のとき、これは $k < -1$ の場合に起こりうるが、$\mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ となるので OY は AB に平行であり、Z は存在しない。）

考えてみよう Z は辺 AB そのものの上にあるか？

そうではない。$-1 < mk < 0$ であるから $\sigma = \frac{1}{mk+1} > 1$ となり、図のとおり Z は AB を B の先へ延長した直線上にある。問題は直線について述べているので、これは差し支えない。

点 T と 2 つの関係式

DZ 上の点は $\mathbf{d}+\tau(\mathbf{z}-\mathbf{d})$ と表される。$\mathbf{b}$ の係数は

$$\frac{1}{1-k}+\tau\left(\frac{1}{mk+1}-\frac{1}{1-k}\right)=\frac{1}{1-k}-\tau\,\frac{k(1+m)}{(mk+1)(1-k)},$$

である。ここで $(1-k)-(mk+1)=-k(1+m)$ を用いた。T が OA 上にあるためにはこれが 0 でなければならないので、$\tau=\dfrac{mk+1}{k(1+m)}$ である（$k\neq 0$ に注意）。このとき $\mathbf{a}$ の係数は

$$\tau\cdot\frac{mk}{mk+1}=\frac{mk+1}{k(1+m)}\cdot\frac{mk}{mk+1}=\frac{m}{1+m}.$$

となる。ゆえに

$$\mathbf{t}=\frac{m}{1+m}\,\mathbf{a}.$$

驚くべきことに k が消えている。T は X の位置だけで決まるのである。

ここで $a=|\mathbf{a}|=OA$ とおく。$0<\frac{m}{1+m}<1$ であるから T は O と A の間にあり、

$$OT=\frac{ma}{1+m},\qquad TA=a-\frac{ma}{1+m}=\frac{a}{1+m},\qquad OX=ma.$$

したがって

$$OT\times OA=\frac{ma^2}{1+m}=ma\times\frac{a}{1+m}=OX\times TA,$$

であり、また

$$\frac{1}{OX}+\frac{1}{OA}=\frac{1}{ma}+\frac{1}{a}=\frac{1+m}{ma}=\frac{1}{OT},$$

である。これらがともに示すべき結果である。

検算

図の台形（trapezium）で試してみよう：$\mathbf{a}=(4,0)$, $\mathbf{b}=(3,2)$, $k=-\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{2}$ とする。このとき $D=(2,\frac{4}{3})$, $Y=(2,2)$, $Z=(\frac{8}{3},\frac{8}{3})$, $T=(\frac{4}{3},0)$ であり、T, D, Z が同一直線上にあること、および $\frac{1}{OT}=\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{OX}+\frac{1}{OA}$ が確かめられる。20,000 個の無作為な台形についてコンピュータで検証したところ、上のすべての式と 10^{-10} 以内の誤差で一致した。極限の場合 $m\to 1$（$X\to A$）では $OT=\frac{1}{2}OA$ となり、$\frac{1}{OT}=\frac{2}{OA}$ と整合する。

よくある間違い

- $k>0$ としてしまう：$\mathbf{c}=\mathbf{b}+k\mathbf{a}$ で $k>0$ とすると、「四角形」が自己交差してしまう。

- 係数比較が許される理由を述べずに係数を等置する：これは $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行でないことに依拠している。
- 異なる 2 直線に同じパラメータの文字を使う：これにより、誤った一致が強制されてしまう。

STEP のその先へ

T が k に（さらには $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角にも）依存しないという事実は、これが本質的にはアフィン幾何（affine geometry）、さらには射影幾何（projective geometry）の定理であることを示している。意味をもつのは結合関係と直線上の比だけなのである。関係式 $\frac{1}{OT} = \frac{1}{OX} + \frac{1}{OA}$ は、複比（cross-ratio）や調和点列（harmonic range）を用いるとエレガントに扱える種類の命題であり、同じ作図を繰り返すと、点が $\frac{m}{1+2m}\mathbf{a}$, $\frac{m}{1+3m}\mathbf{a}$, …と順に定まっていく。さらに知りたい読者は、コクセター（Coxeter）と Greitzer の *Geometry Revisited*（邦題『幾何学再入門』）、またはコクセターの *Projective Geometry*（射影幾何学）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。