解答例

STEP I 2016、第 5 問

純粋数学 • 接する円

> **STEP I 2016、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q5

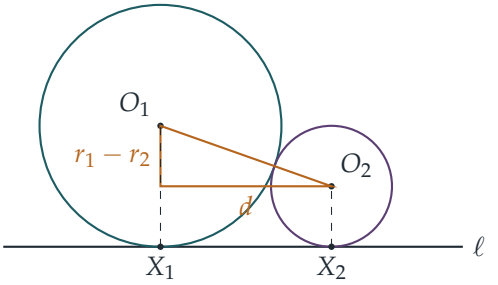
鍵となる考え方

すべては一つの事実に基づいている。二つの円が互いに接し、さらに両方が同じ直線に接しているとき、それぞれの円と直線との接点の間の距離は $2\sqrt{r_1 r_2}$ である。これはただ一つの直角三角形から導かれる。そのうえで置換（substitution）$x = 1/\sqrt{a}$, $y = 1/\sqrt{b}, z = 1/\sqrt{c}$ を行うと、$(**)$ は対称な 4 次式になり、これは四つの 1 次因数に因数分解（factorisation）される。そしてその因数の一つがちょうど $(*)$ なのである。

解答

小問 (i)

直線上で接する二つの円。半径 r_1 と r_2 の二つの円が互いに外接（touching externally）し、ともに直線 ℓ の同じ側にあって、それぞれ点 X_1, X_2 で ℓ に接しているとする。X_1 と X_2 への半径は ℓ に垂直であるから、中心 O_1, O_2 は ℓ からそれぞれ高さ r_1, r_2 の位置にある。二つの円は外接しているので、$O_1O_2 = r_1 + r_2$ である。



O_2 から半径 O_1X_1 に垂線を下ろす（図は $r_1 \geq r_2$ の場合）。すると、斜辺が $r_1 + r_2$、縦の辺が $|r_1 - r_2|$、横の辺が $d = X_1X_2$ の直角三角形ができる。三平方の定理（Pythagoras' theorem）により

$$d^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2, \qquad \text{よって} \qquad X_1X_2 = 2\sqrt{r_1r_2}.$$

これを3回用いる。図では、どの2円も互いに接し、3円すべてが直線に点 P, Q, R で接しており、Q は P と R の間にある。したがって

$$PQ = 2\sqrt{ab}, \qquad QR = 2\sqrt{bc}, \qquad PR = 2\sqrt{ac},$$

であり、$PQ + QR = PR$ より $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} = \sqrt{ac}$ が得られる。両辺を $\sqrt{abc} > 0$ で割ると

$$\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}},$$

となり、これが $(*)$ である。

$(**)$ **を導く**。$x = \dfrac{1}{\sqrt{a}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{b}}, z = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$ とおくと、$\dfrac{1}{a} = x^2$ などが成り立ち、$(*)$ は $y = x + z$ ということである。このとき $(**)$ は $2(x^4 + y^4 + z^4) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ となる。右辺を展開して整理すると、これは

$$F := x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 0.$$

と同値である。

考えてみよう この4次式はどのように因数分解できるだろうか。

二つの平方の差としてまとめる。$(x^2 + y^2 - z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$ であるから

$$\begin{aligned} F &= (x^2 + y^2 - z^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 - 2xy + y^2 - z^2)(x^2 + 2xy + y^2 - z^2) \\ &= ((x - y)^2 - z^2)((x + y)^2 - z^2) \\ &= (x - y - z)(x - y + z)(x + y - z)(x + y + z). \end{aligned}$$

$(*)$ より $x - y + z = 0$ であるから $F = 0$ となり、$(**)$ が成り立つ。

小問 (ii)

今度は a, b, c を、$b < c < a$ かつ $(**)$ を満たす任意の正の数とする。x, y, z を前と同様に定める。これらは正であり、$t \mapsto 1/\sqrt{t}$ は $t > 0$ で減少関数（decreasing function）であるから、条件 $b < c < a$ より

$$y > z > x > 0.$$

が成り立つ。小問 (i) で示したとおり、$(**)$ は

$$(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)(x+y+z)=0,$$

と同値であるから、四つの因数のうちどれかが 0 になる。そのうち三つは 0 になりえない。

- 三つとも正であるから、$x+y+z>0$。
- $y>z$ かつ $x>0$ であるから、$x+y-z>0$。
- $x<y$ かつ $z>0$ であるから、$x-y-z<0$。

したがって $x-y+z=0$、すなわち $y=x+z$ であり、

$$\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{c}},$$

これが $(*)$ である。（実際に必要だったのは、b が三つのうち最小であるという事実だけである。）

検算

- $a=4, c=1$ とする。$(*)$ より $1/\sqrt{b}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ であるから $b=\frac{4}{9}$。このとき $2\left(\frac{1}{16}+\frac{81}{16}+1\right)=\frac{49}{4}$ かつ $\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+1\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$ となり、$(**)$ のとおりである。
- なぜ (ii) で大小関係が必要なのか。$a=4, c=1$ のとき、関係式 $(**)$ は $1/b$ についての 2 次方程式で、二つの解 $b=\frac{4}{9}$ と $b=4$（$1/\sqrt{b}=|x-z|=\frac{1}{2}$ から）をもつ。後者では b は最小ではなく最大であり、$(**)$ は満たすが $(*)$ は満たさない。この場合は $1/\sqrt{c}=1/\sqrt{a}+1/\sqrt{b}$ によって a と b が結びついている。文字の役割を入れ替えることは、どの円が真ん中に来るかを入れ替えることに対応する。
- 直線上で互いに接する 3 円の無作為な配置数千通りについてコンピュータで検証したところ、$(*)$ と $(**)$ の両方が確かめられた。

よくある間違い

- 中心間の距離 r_1+r_2 を接点間の距離として用いてしまう。中心の高さは異なっている。
- 小問 (ii) で、残りの三つの因数を除外せずに因数分解から $(*)$ を結論してしまう。まさにここで $b<c<a$ が使われるのである。

STEP のその先へ

関係式 $(**)$ は、デカルト（Descartes）の円定理（Descartes' circle theorem）の退化した場合である。互いに接する 4 円の曲率（curvature）を $k_i = 1/r_i$ とすると $2\sum k_i^2 = \left(\sum k_i\right)^2$ が成り立ち、直線は曲率 0 の円とみなされる。隙間に新しい円を次々とはめ込んでいくとアポロニウスのギャスケット（Apollonian gasket）ができ、曲率が整数の場合には驚くべき数論が現れる。F の因数分解は、ヘロンの公式（Heron's formula）の背後にあるものでもあり、x, y, z を三角形の 3 辺とすると $16\Delta^2 = -F$ となる。円の幾何学と、これらの結果を見通しよくしてくれる反転（inversion）についてさらに知りたければ、Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。