解答例

STEP I 2016、第 4 問

純粋数学 • 曲線の曲率

> **STEP I 2016、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q4

鍵となる考え方

κ の式は難しい二階微分方程式（second-order differential equation）のように見えるが、小問 (i) はそれが完全な導関数（exact derivative）であることを示すために置かれている。$p = \mathrm{f}'(x)$ とおくと、曲率（curvature）は $p/\sqrt{1+p^2}$ の x による導関数であるから、曲率が一定ならば一見して一度積分できる。二度目の積分は定型的な計算であり、答えはなじみのある図形になる。

解答

小問 (i)

$z(1+z^2)^{-1/2}$ に積の微分法（product rule）を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}}\right) &= (1+z^2)^{-1/2} - z\cdot z(1+z^2)^{-3/2} \\ &= \frac{(1+z^2)-z^2}{(1+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

小問 (ii)

κ を 0 でない定数とし、$p = \mathrm{f}'(x)$ とおく。すると $\mathrm{f}''(x) = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ である。小問 (i) と合成関数の微分法（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{1}{(1+p^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{f}''(x)}{(1+(\mathrm{f}'(x))^2)^{3/2}} = \kappa.$$

x について積分すると、ある定数が存在し、それを $-\kappa a$ と書けば（$\kappa \neq 0$ であるからこう書ける）、

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \kappa(x-a). \qquad (*)$$

が成り立つ。

考えてみよう 符号を見失わずに $(*)$ を p について解くにはどうすればよいか。

2 乗によって何が失われるかを覚えておけば、2 乗しても問題はない。$\sqrt{1+p^2} > 0$ であるから、$(*)$ は p が $\kappa(x-a)$ と同じ符号をもつことを意味し、さらに $|p| < \sqrt{1+p^2}$ であるから $|\kappa(x-a)| < 1$ も意味する。2 乗すると $p^2 = \kappa^2(x-a)^2(1+p^2)$ となるので、

$$p^2 = \frac{\kappa^2(x-a)^2}{1-\kappa^2(x-a)^2}, \qquad \text{かつ、上のように符号を選ぶと、} \qquad p = \frac{\kappa(x-a)}{\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}}.$$

逆に、$1+p^2 = 1/(1-\kappa^2(x-a)^2)$ であるから、この p は確かに $(*)$ を満たす。

ここでもう一度積分する。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2} = \dfrac{-\kappa^2(x-a)}{\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}}$ であるから、ある定数 b を用いて

$$y = b - \frac{1}{\kappa}\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}, \qquad |x-a| < \frac{1}{|\kappa|}.$$

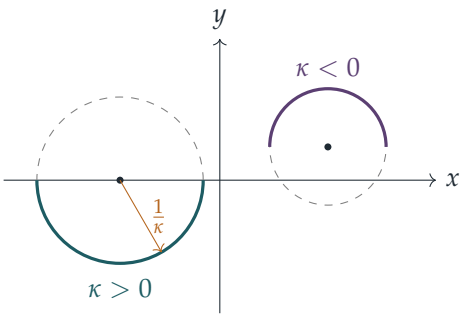
を得る。変形すると $\kappa(y-b) = -\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}$ となり、2 乗すると

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{\kappa^2}.$$

が得られる。したがって、0 でない一定の符号付き曲率（signed curvature）κ をもつ曲線はどれも、中心 (a,b)、半径 $1/|\kappa|$ の円の一部であり、逆にそのような弧はすべて実際に現れる。実際、手順を逆にたどれば、上の各関数の符号付き曲率はちょうど κ である。より正確には $\kappa(y-b) \leq 0$ であるから、次のようになる。

- $\kappa > 0$ ならば、曲線は下半分 $y = b - \sqrt{\kappa^{-2} - (x-a)^2}$ であり、中心より下にあって上に曲がっている（$\mathrm{f}'' > 0$）。
- $\kappa < 0$ ならば、曲線は上半分 $y = b + \sqrt{\kappa^{-2} - (x-a)^2}$ であり、中心より上にあって下に曲がっている（$\mathrm{f}'' < 0$）。

端点 $x = a \pm 1/|\kappa|$ では傾きが無限大になるので除外される。曲線 $y = \mathrm{f}(x)$ はグラフでしかありえないから、開いた半円（またはその一部）を超えることは決してない。



幾何学的な意味

これらの曲線では $|\kappa|$ は円の半径の逆数であるから、$|\kappa|$ が大きいほど円は小さく、急に曲がる。κ の符号は曲線がどちらに曲がるかを表す。円の中心が曲線より上にあるとき（曲線が下に凸のとき）$\kappa > 0$ であり、中心が曲線より下にあるとき $\kappa < 0$ である。

検算

- $\kappa = \frac{1}{2}$、$a = b = 0$ とすると、曲線は $y = -\sqrt{4 - x^2}$、すなわち半径 2 の円の下半分である。$x = 1$ では $y = -\sqrt{3}$、$y' = x/\sqrt{4 - x^2} = 1/\sqrt{3}$、$y'' = 4/(4 - x^2)^{3/2} = 4/3^{3/2}$ であるから、$1 + y'^2 = \frac{4}{3}$ となり、$\kappa = \dfrac{4/3^{3/2}}{(4/3)^{3/2}} = \frac{1}{2}$ となって、期待どおりである。
- 直線では $f'' = 0$ であるから $\kappa = 0$ である。これは半径 $1/|\kappa| \to \infty$ としたときの円の極限であり、問題が $\kappa = 0$ を除外しているのはこのためである。
- $f'' = \kappa(1 + f'^2)^{3/2}$ をランダムな初期値からコンピュータで逐次的に解いたところ、各点は小数第 6 位まで予測どおりの円の上にあった。

よくある間違い

- 最初の段階で積分定数（constant of integration）を忘れること。これにより、中心を水平方向に動かす自由度が失われる。
- p について誤った平方根をとること。これにより、中心の反対側の半円と、誤った κ の符号が得られてしまう。
- 「κ is the radius」（κ は半径である）とだけ述べること。κ は半径の逆数であり、その符号が曲がる向きを表す。

STEP のその先へ

曲率は曲線の微分幾何学（differential geometry）の出発点である。弧長（arc length）s でパラメータ表示された曲線では $\kappa = \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}s$ である。ここで ψ は接線（tangent）が x 軸となす角である。いまの場合 $p/\sqrt{1+p^2} = \sin\psi$ であるから、$(*)$ は本質的には、ψ が曲線に沿って一定の割合で変化するという主張である。3 次元では曲率に捩率（torsion）が加わり、フレネ–セレの公式（Frenet–Serret formulae）により、これら二つの関数が剛体運動（rigid motion）を除いて曲線を決定することが示される。Pressley の *Elementary Differential Geometry*（初等微分幾何学）は、大学 1 年生程度の水準の親しみやすい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。