解答例

STEP I 2016、第 12 問

確率・統計 ・ 二項係数の対称性

STEP I 2016、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s1-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.6 節「もう 1 枚の硬貨」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/one-more-coin.html

鍵となる考え方

小問 (i) と (ii) は二項分布の確率（binomial probabilities）を用いた直接計算であり、どちらも驚くほど簡単な同じ答えになる。小問 (iii) はその理由を説明するものである。ボブの投げる回数を最初の n 回と追加の 1 回に分ける。最初の n 回についてはボブとアリスは対等な立場にあるので、対称性（symmetry）が効いてくる。そして追加の 1 回が引き分けを公平に決着させる。

解答

以下、アリスが出す表の回数を A、ボブが出す表の回数を B とする。公平な硬貨を m 回投げるとき、表の回数 X は

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{m}{k} \frac{1}{2^m}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m,$$

を満たす。また、アリスとボブの試行は独立（independent）であるから、A と B に関する確率は掛け合わせることができる。

小問 (i)

アリスは 2 回、ボブは 3 回投げるので、

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(A=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
$\mathrm{P}(B=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

となる。アリスの得点で条件付け（conditioning）を行う。$A=a$ のとき $B>a$ が必要なので、裾確率（tail probabilities）$\mathrm{P}(B>0)=\frac{7}{8}$、$\mathrm{P}(B>1)=\frac{1}{2}$、$\mathrm{P}(B>2)=\frac{1}{8}$ が必要になる。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B>A) &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{7}{8}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{8}\\ &= \frac{7+8+1}{32}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

小問 (ii)

今度は $a=0,1,2,3$ に対して $\mathrm{P}(A=a)=\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}$ であり、$k=0,\ldots,4$ に対して $\mathrm{P}(B=k)=\frac{1}{16},\frac{4}{16},\frac{6}{16},\frac{4}{16},\frac{1}{16}$ である。裾確率は

$$\mathrm{P}(B>0)=\tfrac{15}{16},\quad \mathrm{P}(B>1)=\tfrac{11}{16},\quad \mathrm{P}(B>2)=\tfrac{5}{16},\quad \mathrm{P}(B>3)=\tfrac{1}{16}.$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B>A) &= \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{15}{16}+\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{11}{16}+\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{5}{16}+\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{16}\\ &= \frac{15+33+15+1}{128}=\frac{64}{128}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

今回もまた、答えはちょうど $\frac{1}{2}$ である。

小問 (iii)

まず、投げる回数が等しいゲームについての事実を確認する。アリスとボブがそれぞれ n 回投げるとき、「ボブの方が多い」「同じ」「アリスの方が多い」のうちちょうど一つが起こる。二人は同一の試行を行うので状況は二人の間で対称であり、「アリスの方が多い」の確率も p_2 である。したがって

$$2p_2+p_1=1. \qquad (*)$$

次に、アリスが n 回、ボブが $n+1$ 回投げるとする。ボブの**最初の** n 回における表の回数を B' とし、最後の 1 回が表であるという事象を H とする。このとき、H が起これば $B=B'+1$、そうでなければ $B=B'$ である。

考えてみよう B と A の比較は、B' と A の比較にどう依存するか？

B' と A は整数であり、B は B' または $B'+1$ であるから、

- $B' > A$ ならば、最後の 1 回の結果によらず必ず $B > A$ である。
- $B' = A$ ならば、$B > A$ となるのは最後の 1 回が表のときであり、かつそのときに限る。
- $B' < A$ ならば、$B' \leq A - 1$ であるから $B \leq A$ となり、ボブは勝たない。

ボブの最初の n 回とアリスの n 回の比較は、まさに投げる回数が等しいゲームそのものであるから、$\mathrm{P}(B' > A) = p_2$、$\mathrm{P}(B' = A) = p_1$ である。最後の 1 回は他のすべてと独立であり、$\mathrm{P}(H) = \frac{1}{2}$ である。よって

$$\mathrm{P}(\text{ボブがアリスより多く表を出す}) = p_2 + \tfrac{1}{2}p_1.$$

$(*)$ より、$p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}(2p_2 + p_1) = \frac{1}{2}$ である。

これが一般化（generalisation）である。**アリスが公平な硬貨を n 回、ボブが公平な硬貨を $n+1$ 回投げるとき、ボブがアリスより多く表を出す確率は、すべての $n \geq 0$ に対して $\frac{1}{2}$ である。**小問 (i) と (ii) はそれぞれ $n = 2$ と $n = 3$ の場合にあたる。

検算

- $n = 0$：アリスは一度も投げず、ボブは 1 回だけ投げる。ボブが勝つのは表が出たときであり、かつそのときに限るので、確率は $\frac{1}{2}$ である。
- $n = 2$：手計算で $p_1 = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$ であり、$(*)$ より $p_2 = \frac{5}{16}$ である。すると $p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{5}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$ となり、小問 (i) と一致する。
- コンピュータによる全数列挙（exact enumeration）で、29 以下のすべての n について $\mathrm{P}(B > A) = \frac{1}{2}$ であることが確かめられた。また、小問 (ii) を 200 000 回試行するシミュレーション（simulation）では 0.4997 という値が得られた。

よくある間違い

- 投げる回数が等しいゲームで $p_2 = \frac{1}{2}$ と思い込むこと。引き分けの確率は正であるから、$p_2 = \frac{1}{2}(1 - p_1) < \frac{1}{2}$ である。
- 小問 (iii) で $B' = A$ の場合を忘れること、あるいは追加の 1 回に対応する係数 $\frac{1}{2}$ を掛けずにそのまま全部数えてしまうこと。
- 裾確率として $\mathrm{P}(B > a)$ ではなく $\mathrm{P}(B \geq a)$ を用いること。

STEP のその先へ

この美しい答えは、対称性の議論と、追加の 1 ステップについての条件付けを組み合わせることで得られる。これはランダムウォーク（random walk）から投票問題（ballot problem）に至るまで、確率論全体を貫く典型的な手法である。より鮮やかな別証もある。ボブは 1 回多く投げるので、ボブがアリスより多く表を出すことに**失敗する**のは、ボブがアリスより多く裏を出すときであり、かつそのときに限る。表と裏を入れ替えれば「表の方が多い」と「裏の方が多い」の確率は等しく、しかもこの二つは互いに余事象（complementary）であるから、それぞれの確率は $\frac{1}{2}$ である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、こうした条件付けと対称性の技法が展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。