解答例

STEP I 2016、第 11 問

力学 ・ 放物運動の最大到達距離

STEP I 2016、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

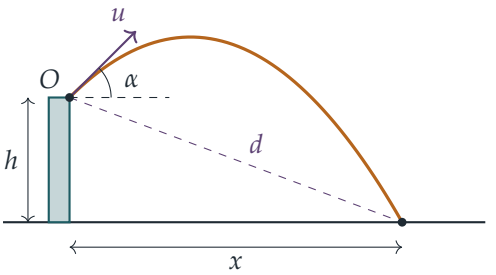
step.maths.org/questions/16-s1-q11

鍵となる考え方

水平方向と鉛直方向の運動を書き下し、時間を消去して、$\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ の 2 乗を倍角（double angle）の式に直す。水平到達距離（range）の最大値を求めるには、着地の方程式が x を α の陰関数（implicit function）として定めているとみなして微分する。最大となるところでは $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha = 0$ であり、あとはただ一つの未知数 $\cos 2\alpha$ についての三角関数の式変形である。

解答

P を重力のみを受けて運動する質点（particle）としてモデル化し（空気抵抗は無視する）、地面は水平であるとする。塔の根元を原点とし、x 軸を発射方向に水平に、y 軸を鉛直上向きにとる。このとき O は点 $(0, h)$ である。



着地の方程式

発射から時間 t が経過したとき、

$$X = ut\cos\alpha, \qquad Y = h + ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

塔は鉛直に立っており、P はある距離 $x > 0$ のところに着地するので、$\cos\alpha \neq 0$ であり、$Y = 0$ となる着地の時点で $t = \dfrac{x}{u\cos\alpha}$ である。よって

$$0 = h + x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}.$$

両辺に $2\cos^2\alpha$ を掛け、$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$ と $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ を用いると

$$\frac{gx^2}{u^2} = 2h\cos^2\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha = h(1 + \cos 2\alpha) + x\sin 2\alpha,$$

となり、これが求める方程式である。

水平距離の最大値

角 α は $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動きうる（下向きに発射してもよい）。このような各 α に対し、着地距離 x は α の正の値をとる滑らかな関数であり、$\alpha \to \pm\frac{\pi}{2}$ のとき $x \to 0$ となる。水平方向の速さ $u\cos\alpha$ が 0 に近づく一方で、飛行時間は有界にとどまるからである。したがって x は区間の内部のある α で最大値をとり、そこでは $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha = 0$ である。

$x' = \mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha$ と書き、着地の方程式を α で微分すると

$$\frac{2gx}{u^2}\,x' = -2h\sin 2\alpha + x'\sin 2\alpha + 2x\cos 2\alpha.$$

$x' = 0$ とおくと

$$x\cos 2\alpha = h\sin 2\alpha.$$

ここで $\cos 2\alpha \neq 0$ である。実際、そうでなければ $h > 0$ より $h\sin 2\alpha = 0$ から $\sin 2\alpha = 0$ も成り立つことになるが、これはありえない。したがって最大となるところで

$$x = h\tan 2\alpha,$$

が成り立ち、これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** これで x と α についての方程式が二つ得られた。x をうまく消去するにはどうすればよいだろうか。

$x = h\tan 2\alpha$ を着地の方程式に代入し、$c = \cos 2\alpha$、$s = \sin 2\alpha$ とおく。右辺は

$$h(1 + c) + h\,\frac{s^2}{c} = \frac{h\,(c + c^2 + s^2)}{c} = \frac{h(1 + c)}{c},$$

となり、左辺は

$$\frac{gh^2}{u^2}\cdot\frac{s^2}{c^2}=\frac{gh^2(1-c)(1+c)}{u^2c^2}.$$

となる。両者を等しいとおき、$h(1+c)/c$ で割る。$c\neq -1$ なのでこれは 0 でない（$c\neq 0$ はすでに示した。また $c=-1$ なら $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$ となってしまう）。すると

$$\frac{gh(1-c)}{u^2c}=1 \quad\Longrightarrow\quad gh-ghc=u^2c \quad\Longrightarrow\quad \cos 2\alpha=\frac{gh}{u^2+gh}.$$

停留点（stationary point）でとりうる値はこれしかなく、さらに $\tan 2\alpha=x/h>0$ より $0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$ に限られるので、停留点はちょうど一つであり、それが最大を与える点である。（参考までに、$\tan 2\alpha=\dfrac{u\sqrt{u^2+2gh}}{gh}$ であるから、最大距離は $x=\dfrac{u\sqrt{u^2+2gh}}{g}$ である。）

O からの距離の最大値

着地点は $(x,0)$ であるから、$O=(0,h)$ からの距離は

$$d=\sqrt{x^2+h^2}.$$

である。h を固定すると d は x について増加するので、d が最大となるのはちょうど x が最大となるときである。そのとき $x=h\tan 2\alpha$ であるから、$\sec 2\alpha>0$ を用いて

$$d=\sqrt{h^2\tan^2 2\alpha+h^2}=h\sec 2\alpha=h\cdot\frac{u^2+gh}{gh}=\frac{u^2}{g}+h,$$

となる。これが求める最大距離である。

検算

- $h=0$ とすると $\cos 2\alpha=0$ となるので $\alpha=45^\circ$ であり、最大到達距離は u^2/g である。これは水平な地面の上でのおなじみの結果である。
- $u=10$、$g=10$、$h=5$（SI 単位）とする。このとき $\cos 2\alpha=\frac{50}{150}=\frac{1}{3}$、最大到達距離は $\sqrt{100\cdot 200}/10=10\sqrt{2}\approx 14.14$、そして $d=\sqrt{200+25}=15=\frac{100}{10}+5$ となり、予測どおりである。計算機で α を走査して調べると、着地距離の最大値は確かに 14.14 である。
- h を大きくしていくと $\cos 2\alpha\to 1$ となるので、最適な角度は 0 に近づく。非常に高い塔からは、ほぼ水平に発射すべきなのである。

よくある間違い

- $x = h\tan 2\alpha$ と書いたあと、それが最大となるところでのみ成り立ち、すべての α で成り立つわけではないことを忘れてしまう。
- $1 + \cos 2\alpha$ や $\cos 2\alpha$ で割るときに、それらが 0 でない理由を述べない。
- $d^2 = x^2 + h^2$ が x と同じ角度で最大になることに気づかず、d を別途最大化しようとする。

STEP のその先へ

答え $d = u^2/g + h$ には美しい幾何学的な説明がある。O から速さ u で発射される軌道はすべて、ある一つの**包絡線**（envelope）に接する。これは「安全放物線」（parabola of safety）と呼ばれ、O を焦点（focus）とし、O の上方 u^2/g の高さにある直線を準線（directrix）とする放物線である。最も遠い着地点はこの包絡線上にあるので、焦点と準線の性質により、その点の O からの距離は準線からの距離、すなわち $u^2/g + h$ に等しい。曲線族の包絡線は、大学 1 年次の微積分や力学で扱われる標準的な題材である。放物運動の問題をこのように丁寧に扱った次の一冊としては、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。