解答例

STEP I 2016、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

> **STEP I 2016、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q10

鍵となる考え方

衝突は三回起こり、どの衝突も同じ二つの式、すなわち運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）によって扱える。最初の二つの衝突は同時に起こるが互いに独立なので、別々に計算して、B と C が出会う直前の速度を求めればよい。そのうえで、B が最終的に静止するという条件から、λ と e を結ぶ式が一つ得られる。

解答

四つの物体を滑らかな（smooth）台の上の質点（particle）としてモデル化する。したがって衝突以外では水平方向の力ははたらかず、どの衝突も一直線上での直接衝突（direct collision）である。A から D へ向かう向きを正とすると、A の初速度は u、D の初速度は $-u$ である。



小問 (i)

A が B に衝突する。衝突後の A と B の速度をそれぞれ v_A、v_B とする。このとき

$$\begin{aligned} \text{運動量：}\quad & \lambda mu = \lambda m v_A + m v_B, \\ \text{反発：}\quad & v_B - v_A = eu. \end{aligned}$$

$v_B = v_A + eu$ を第一の式に代入すると $(\lambda+1)v_A = (\lambda - e)u$ となるので、

$$v_A = \frac{(\lambda - e)u}{\lambda + 1}, \qquad v_B = v_A + eu = \frac{\lambda(1+e)u}{\lambda+1}.$$

D が C に衝突する。衝突後の C と D の速度をそれぞれ v_C、v_D とする。このとき

$$\begin{aligned} \text{運動量：}\quad & -mu = m v_C + m v_D, \\ \text{反発：}\quad & v_D - v_C = e(0 - (-u)) = eu. \end{aligned}$$

（衝突前、C と D は速さ u で近づく。衝突後は D が C の右側にあるので、両者は $v_D - v_C$ の割合で遠ざかる。）この二式を解くと

$$v_C = -\tfrac{1}{2}(1+e)u, \qquad v_D = -\tfrac{1}{2}(1-e)u.$$

よって C は速さ $\frac{1}{2}(1+e)u$ で B に向かって動き、D はそれより小さい速さ $\frac{1}{2}(1-e)u$ で左向きに C を追う。

B が C に衝突する。このとき B は速度 v_B で右へ、C は左へ動いているので、両者は速さ $v_B - v_C$ で近づく。衝突後 B は静止する。C の速度を w とすると

$$\begin{aligned} \text{運動量：}\quad & m v_B + m v_C = 0 + mw, \\ \text{反発：}\quad & w - 0 = e(v_B - v_C). \end{aligned}$$

w を消去すると $v_B + v_C = e(v_B - v_C)$、すなわち

$$(1-e)v_B = -(1+e)v_C.$$

上で求めた速度を代入すると

$$(1-e)\cdot\frac{\lambda(1+e)u}{\lambda+1} = (1+e)\cdot\tfrac{1}{2}(1+e)u.$$

$u \neq 0$ かつ $1+e > 0$ なので、$(1+e)u$ で割ってよい：

$$\begin{aligned} 2\lambda(1-e) &= (1+e)(\lambda+1) \\ 2\lambda - 2\lambda e &= \lambda + 1 + e\lambda + e \\ \lambda - 1 &= e(3\lambda + 1), \end{aligned}$$

さらに $3\lambda+1>0$ であるから

$$e=\frac{\lambda-1}{3\lambda+1},$$

となり、題意が示された。

後半の結論については、$\lambda>1$ より

$$\frac{1}{3}-e=\frac{(3\lambda+1)-3(\lambda-1)}{3(3\lambda+1)}=\frac{4}{3(3\lambda+1)}>0,$$

である。したがって $e<\frac{1}{3}$ である。（また $\lambda>1$ より $e>0$ なので、これらの衝突は確かに完全非弾性（perfectly inelastic）ではない。）

小問 (ii)

三回目の衝突の後、C の速度は

$$w=v_B+v_C=(1+e)u\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{(1+e)(\lambda-1)u}{2(\lambda+1)},$$

であり、$\lambda>1$ よりこれは正である。つまり C は今度は右向きに動き、依然として速さ $\frac{1}{2}(1-e)u$ で左向きに動いている D の方へ戻っていく。

考えてみよう 「速さが等しい」という条件からどのような式が得られるか。また、e をどのように消去すればよいか。

速さが等しいのは

$$\frac{(1+e)(\lambda-1)}{2(\lambda+1)}=\frac{1-e}{2}.$$

のときである。小問 (i) より $1+e=\dfrac{4\lambda}{3\lambda+1}$、$1-e=\dfrac{2(\lambda+1)}{3\lambda+1}$ である。これらを代入し、共通因数 $\dfrac{1}{3\lambda+1}$ を約すと

$$\begin{aligned}\frac{4\lambda(\lambda-1)}{\lambda+1}&=2(\lambda+1)\\ 2\lambda^2-2\lambda&=\lambda^2+2\lambda+1\\ \lambda^2-4\lambda-1&=0,\end{aligned}$$

よって $\lambda=2\pm\sqrt{5}$ である。$\lambda>1$ を満たすのは $\lambda=2+\sqrt{5}$ のみである（もう一方の解は負である）。このとき

$$e=\frac{1+\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}=\frac{(1+\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}{49-45}=\frac{4\sqrt{5}-8}{4}=\sqrt{5}-2.$$

したがって

$$\lambda=2+\sqrt{5},\qquad e=\sqrt{5}-2.$$

検算

- $e = \sqrt{5} - 2 \approx 0.236$ であり、小問 (i) の要求どおり確かに 0 と $\frac{1}{3}$ の間にある。
- $\lambda = 2 + \sqrt{5} \approx 4.236$、$u = 1$、$e \approx 0.236$ として三回の衝突を数値的に計算すると、三回目の衝突の前は $v_B = 1$（たまたまちょうど 1 になる）、$v_C \approx -0.618$ となる。衝突後は B が静止し、C は約 0.382 の速さで右へ、D は約 0.382 の速さで左へ動く。共通の速さは $\frac{1}{2}(1-e)u = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})u$ である。
- 極限の場合：$\lambda \to 1$ のとき $e \to 0$ となる。質量が等しく $e = 0$ のとき、B と C は大きさが等しく向きが逆の速度で出会うので、合体すると静止する。これは当然そうなるべき結果である。

よくある間違い

- C と D の衝突における反発の式で符号を誤ること。すべての速度を同じ正の向きで表し、「遠ざかる速さ $= e\times$ 近づく速さ」を注意深く用いること。
- C が B に向かって動きながら三回目の衝突に至ることを忘れること。近づく速さは $v_B - v_C = v_B + \frac{1}{2}(1+e)u$ であって、$v_B - \frac{1}{2}(1+e)u$ ではない。
- 負である解 $\lambda = 2 - \sqrt{5}$ を残してしまうこと。

STEP のその先へ

反発を伴う衝突は、エネルギー損失の最も単純なモデルである。直接衝突で失われる運動エネルギー（kinetic energy）は $1 - e^2$ に比例し、$e = 1$ はエネルギーが保存される弾性衝突（elastic collision）の場合にあたる。大学一年目の講義では、これらの考え方から重心系（centre-of-mass frame）へと進む。重心系では二体衝突はすべて対称的に見え、上の計算はほとんど自明になる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この方法で衝突の理論を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。