解答例

STEP I 2016、第 1 問

純粋数学 • 多項式の恒等式と因数分解

> **STEP I 2016、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q1

鍵となる考え方

商（quotient）$q_n(x)$ は実は多項式（polynomial）である。$2n+1$ は奇数なので $x+1$ は $x^{2n+1}+1$ を割り切り、その商は符号が交互に変わる等比数列の和になる。したがって小問 (i) は、p_n を展開して係数を比較（comparing coefficients）すればよい。小問 (ii) の見どころは p_n の形から生まれる。$2n+1$ と x の積が平方数になるとき、p_n は平方の差（difference of two squares）となり、因数分解（factorisation）できるのである。

解答

小問 (i)

$x \neq -1$ のとき、初項 1、公比 $-x$ の等比級数（geometric series）の和をとると

$$1 - x + x^2 - \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{2n+1}}{1+x} = \frac{1+x^{2n+1}}{1+x},$$

となる。ここで $2n+1$ が奇数であることから $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$ を用いた。よって

$$q_n(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \cdots - x + 1,$$

であり、$2n+1$ 個の係数はすべて ± 1 で、符号は交互に変わる。以下、各場合について p_n を展開する。

$n = 1$ のとき。

$$p_1(x) = (x+1)^2 - 3x = x^2 + 2x + 1 - 3x = x^2 - x + 1 = q_1(x).$$

$n = 2$ のとき。

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (x+1)^4 - 5x(x^2+x+1) \\ &= (x^4+4x^3+6x^2+4x+1) - (5x^3+5x^2+5x) \\ &= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = q_2(x). \end{aligned}$$

$n = 3$ のとき。まず $(x^2+x+1)^2 = x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ であるから、

$$\begin{aligned} p_3(x) &= (x+1)^6 - 7x(x^2+x+1)^2 \\ &= (x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1) - (7x^5+14x^4+21x^3+14x^2+7x) \\ &= x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = q_3(x). \end{aligned}$$

以上より、$n = 1, 2, 3$ のとき $x \neq -1$ に対して $p_n(x) \equiv q_n(x)$ が成り立つ。これが示すべきことであった。

$n = 4$ のとき。恒等式（identity）を否定するには、x の値が一つあれば十分である。$x = 1$ とすると

$$p_4(1) = 2^8 - 9 \cdot 1 \cdot 3^3 = 256 - 243 = 13, \qquad q_4(1) = \frac{1+1}{1+1} = 1,$$

であるから、$p_4 \not\equiv q_4$ である。（完全に展開すると $p_4(x) = x^8 - x^7 + x^6 + 2x^5 + 7x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1$ となり、x^5 の項から先が合わなくなる。）

小問 (ii)

考えてみよう どの n とどの x を使えばよいか。そして、p_n はどうすれば因数分解できるのか。

$\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}$ を与えられた数に合わせることで、x と n が決まる。そこで p_n の形が役に立つ。$(x+1)^{2n} = ((x+1)^n)^2$ は常に平方であり、$(x^2+x+1)^{n-1}$ は n が奇数のとき平方である。したがって $(2n+1)x$ も平方数であれば、$p_n(x)$ は平方の差になる。

(a) $n = 1$、$x = 300$ とする。このとき $2n+1 = 3$ であり、$3x = 900 = 30^2$ である。小問 (i) より

$$\begin{aligned} \frac{300^3+1}{301} = q_1(300) = p_1(300) &= 301^2 - 3 \cdot 300 \\ &= 301^2 - 30^2 \\ &= (301-30)(301+30) = 271 \times 331. \end{aligned}$$

どちらの因数も 1 ではない。（直接計算しても $300^2 - 300 + 1 = 89\,701 = 271 \times 331$ である。）

(b) $7^{49} = (7^7)^7$ であるから、$n = 3$（すなわち $2n+1 = 7$）、$x = 7^7$ とする。すると $(2n+1)x = 7 \cdot 7^7 = 7^8 = (7^4)^2$ は平方数であり、$n - 1 = 2$ は偶数である。小問 (i) より

$$\begin{aligned}\frac{7^{49}+1}{7^7+1} = q_3(7^7) = p_3(7^7) &= (7^7+1)^6 - 7^8\,(7^{14}+7^7+1)^2 \\ &= [(7^7+1)^3]^2 - [7^4(7^{14}+7^7+1)]^2,\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{7^{49}+1}{7^7+1} = \Big[(7^7+1)^3 - 7^4(7^{14}+7^7+1)\Big]\Big[(7^7+1)^3 + 7^4(7^{14}+7^7+1)\Big].$$

2 番目の因数が 1 より大きいことは明らかである。1 番目については、$(7^7+1)^3 > 7^{21}$ である一方、

$$7^4(7^{14}+7^7+1) = 7^{18} + 7^{11} + 7^4 < 7^{19},$$

であるから、1 番目の因数は $7^{21} - 7^{19} = 48 \cdot 7^{19} > 1$ より大きい。どちらの因数も 1 ではなく、求める因数分解が得られた。（括弧を展開すると、2 つの因数は $7^{21} + 3 \cdot 7^{14} + 3 \cdot 7^7 + 1 \mp (7^{18} + 7^{11} + 7^4)$ と書くこともできる。）

検算

- 小問 (i) で $x = 1$ とおくと、$p_1(1) = 4 - 3 = 1$、$p_2(1) = 16 - 15 = 1$、$p_3(1) = 64 - 63 = 1$ となり、いずれも $q_n(1) = 1$ に等しい。一方、$p_4(1) = 13$ である。
- (a) において、$271 \times 331 = 89\,701 = 300^2 - 300 + 1$ である。
- (b) において、正確な整数値をコンピュータで確かめると、2 つの因数の積は $(7^{49}+1)/(7^7+1)$ に等しい。因数はおよそ 5.57×10^{17} と 5.60×10^{17} である。

よくある間違い

- どちらの因数も 1 でない理由を述べ忘れること。(b) ではこのために簡単な大きさの評価が必要である。
- (b) で $n = 24$ や $x = 7$ を使うこと。指数 49 は 7×7 と見なければならず、そうすると $x = 7^7$、$2n+1 = 7$ となる。

STEP のその先へ

ここで使った技法は、オーリフィーユ型因数分解（Aurifeuillean factorisation）の特別な場合である。これは $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$ のような恒等式で、$a^k \pm 1$ の形の数を、自明な代数的因数から予想されるよりもさらに細かく分解する。これらは円分多項式（cyclotomic polynomials）から生じるもので、円分多項式は大学 1 年の代数学や整数論（number theory）の講義に登場する。また、$2^k \pm 1$ の形の大きな数を素因数分解する探求にも使われてきた。因数分解と素数についてさらに学ぶには、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）がよい出発点である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。