解答例

STEP III 2015、第 9 問

力学 ・ 非線形弾性振動

STEP III 2015、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s3-q9

鍵となる考え方

レールはなめらかであり、垂直抗力（normal reaction）は仕事をしないので、エネルギーが保存され、そこからただちに 1 階の方程式が得られる。レール上のどの点でも $PQ \geq a$ であるから、糸がたるむことはない。折り返し点は $\dot{x} = 0$ となる点である。周期は、中心から x_0 まで進むのにかかる時間の 4 倍である。v が小さいとき、質点は出発点の近くにとどまるので $\sqrt{x^2 + a^2} - a \approx x^2/(2a)$ となり、置換 $x = x_0 u$ によって積分がすっきりした形になる。

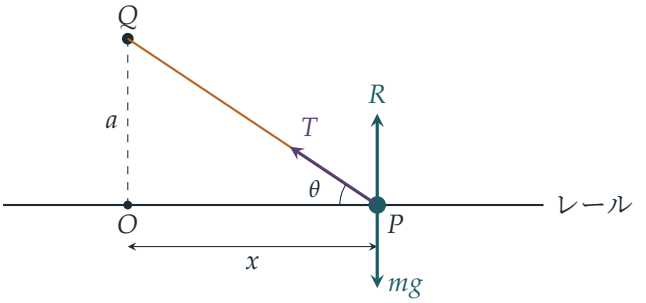
解答

エネルギーの式

P を質点とみなし、糸は軽く、フックの法則（Hooke's law）に従う弾性糸とする。レールを x 軸にとり、P は Q から下ろした垂線の足である原点から出発するものとする。P が x にあるとき、Q からの距離は $PQ = \sqrt{x^2 + a^2} \geq a$ であるから糸は張っており、その伸びは

$$e = \sqrt{x^2 + a^2} - a \ \ (\geq 0).$$

である。



P にはたらく力は、重力、レールからの垂直抗力 R（いずれも運動の向きに垂直なので仕事をしない）、および張力 T である。張力は保存力であり、その弾性エネルギーは $\lambda e^2/(2a)$ である。はじめ $e = 0$ で速さは v であるから、エネルギー保存則（conservation of energy）より

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{\lambda}{2a}\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

両辺に $2/m$ を掛け、$k^2 = \lambda/(ma)$ とおくと

$$\dot{x}^2 = v^2 - k^2\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)^2,$$

となり、求める式が得られる。

最大変位とそこでの加速度

伸び e は $|x|$ とともに増加するので、P が外側へ進むにつれて $\dot{x}^2$ は減少し、P は $\dot{x} = 0$ となるまで外側へ進む。その点では $k\left(\sqrt{x_0^2+a^2} - a\right) = v$ である（$e \geq 0$ なので正の根をとる）。よって

$$\sqrt{x_0^2+a^2} = a + \frac{v}{k} \quad \Longrightarrow \quad x_0^2 = \left(a + \frac{v}{k}\right)^2 - a^2 = \frac{2av}{k} + \frac{v^2}{k^2},$$

となるから、

$$x_0 = \frac{\sqrt{v\,(2ak+v)}}{k}.$$

を得る。

加速度を求めるには、レールに沿った方向に力を分解する。θ を PQ とレールのなす角とすると $\cos\theta = x/\sqrt{x^2+a^2}$ であり、張力のレール方向の成分は O に向かう向きに $T\cos\theta$ である。$T = \lambda e/a$ であるから

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{a}\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}, \qquad \text{よって} \qquad \ddot{x} = -k^2\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

（エネルギーの式を t で微分し、$2\dot{x}$ で割っても同じ結果が得られる。）$x = x_0$ では $\sqrt{x_0^2 + a^2} - a = v/k$ かつ $\sqrt{x_0^2 + a^2} = (ak + v)/k$ であるから

$$\ddot{x} = -k^2 \cdot \frac{v}{k} \cdot \frac{k\,x_0}{ak + v} = -\frac{k^2 v\,x_0}{ak + v} = -\frac{kv\sqrt{v\,(2ak + v)}}{ak + v}.$$

したがって、x_0 における加速度の大きさは $\dfrac{kv\sqrt{v(2ak + v)}}{ak + v}$ であり、その向きはレールに沿って最初の位置へ戻る向きである。

周期

$\dot{x}^2$ の式は x^2 のみに依存するので、運動は O に関して対称である。質点は $-x_0$ と x_0 の間で振動し、4 つの区間 $O \to x_0 \to O \to -x_0 \to O$ はいずれも同じ時間を要する。最初の区間では $\dot{x} > 0$ であるから $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\dot{x}$ となり、周期（period）は

$$\tau = 4\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v^2 - k^2\left(\sqrt{x^2 + a^2} - a\right)^2}}.$$

である。被積分関数は x_0 で発散するが、その発散は $(x_0 - x)^{-1/2}$ 程度にすぎないので、積分は収束（converge）する。

考えてみよう $v \ll ka$ から、x の大きさについて何がわかるか。

$x_0^2 = 2av/k + v^2/k^2$ であるから、$v/k \ll a$ ならば $x_0^2 \approx 2av/k$ となり、$x_0^2/a^2 \approx 2v/(ka) \ll 1$ である。したがって積分範囲のすべての x は $|x| \ll a$ を満たし、二項展開（binomial expansion）により

$$\sqrt{x^2 + a^2} - a = a\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} - a \approx \frac{x^2}{2a}.$$

となる。周期は

$$\tau \approx 4\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v^2 - k^2x^4/(4a^2)}}, \qquad x_0 \approx \sqrt{\frac{2av}{k}},$$

となり、$k^2x_0^4/(4a^2) = v^2$ であるから、この近似した x_0 はちょうど新しい分母が 0 になる点である。ここで $x = x_0 u$ と置換すると、$\mathrm{d}x = x_0\,\mathrm{d}u$ かつ $k^2x^4/(4a^2) = v^2u^4$ であるから

$$\tau \approx 4\int_0^1 \frac{x_0\,\mathrm{d}u}{v\sqrt{1 - u^4}} = \frac{4}{v}\sqrt{\frac{2av}{k}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^4}} = \sqrt{\frac{32a}{kv}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^4}},$$

となる。ここで $\frac{16}{v^2} \cdot \frac{2av}{k} = \frac{32a}{kv}$ を用いた。これが求める近似式である。

検算

- 単位：$k^2 = \lambda/(ma)$ の単位は s^{-2} であるから、v/k は長さであり（x_0 における伸びなので、そうでなければならない）、$\sqrt{a/(kv)}$ は時間である。
- $m = 1$、$\lambda = 2$、$a = 1$、$v = 1$ とすると、$k = \sqrt{2}$、$x_0 = \sqrt{1 + 2\sqrt{2}} \approx 1.3836$ であり、x_0 における加速度は ≈ -1.1462 となる。運動方程式を数値的に時間発展させると同じ折り返し点が得られ、周期は約 7.612 となって、積分の値と一致する。
- $a = 1$、$k = 2$、$v = 0.001$ のとき、周期の積分の厳密な値は 165.862 であり、近似式からは 165.833 が得られる。ここで $\int_0^1 (1 - u^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}u \approx 1.3110$ である。$v \to 0$ のとき、この比は 1 に近づく。

よくある間違い

- 伸びとして $\sqrt{x^2 + a^2} - a$ ではなく x や $\sqrt{x^2 + a^2}$ を使ってしまう。糸ははじめ自然長である。
- 張力を分解し忘れる。レールに沿ってはたらくのは成分 $T\cos\theta$ だけである。
- 周期を $2\int_0^{x_0}$ や $\int_0^{x_0}$ としてしまう。振動は $-x_0$ と x_0 の間で起こるので、4 分の 1 周期が 4 つ必要である。

STEP のその先へ

v が小さいとき、復元力はおよそ x ではなく x^3 に比例するので、これは非線形振動子（nonlinear oscillator）であり、単振動（simple harmonic motion）とは異なり、周期が振幅に依存して、エネルギーが小さくなるにつれて $v^{-1/2}$ のように増大する。積分 $\int_0^1 (1 - u^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}u$ は楕円積分（elliptic integral）であり（レムニスケート定数の半分）、振り子の厳密な周期にも現れる種類の積分である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方でエネルギーを用いた解法と振動を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。