解答例

STEP III 2015、第 8 問

純粋数学 • 極座標の微分方程式

STEP III 2015、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s3-q8

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.4 節「渦を巻いて円に近づく」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/limit-cycle.html

鍵となる考え方

2 つの微分方程式（differential equation）はどちらも $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ と $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ という組合せから組み立てられており、これらはまさに極座標（polar coordinates）によって簡単になる組合せである。実際、それぞれ $r^2\,\mathrm{d}\theta$ と $r\,\mathrm{d}r$ になる。そこで θ を曲線に沿った媒介変数（parameter）とみなし、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ を θ による導関数の比として表し、三角関数の部分が消えていくのに任せる。小問 (ii) では、追加された項によって方程式は r についてのベルヌーイ型微分方程式（Bernoulli equation）になり、置換 $u = r^{-2}$ によって線形になる。

解答

r' で $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ を表し、$c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$ とおく。曲線 $r = r(\theta)$ に沿って

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'c - rs, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r's + rc, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}.$$

である。どちらの方程式も両辺に $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ を掛けると、$P\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Q$ の形の方程式は

$$P\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - Q\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = 0.$$

となる。計算の要はすべて次の 2 つの恒等式である。

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = rc(r's + rc) - rs(r'c - rs) = r^2(c^2 + s^2) = r^2,$$
$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = rc(r'c - rs) + rs(r's + rc) = rr'.$$

小問 (i)

ここでは $P = y + x$、$Q = y - x$ であるから

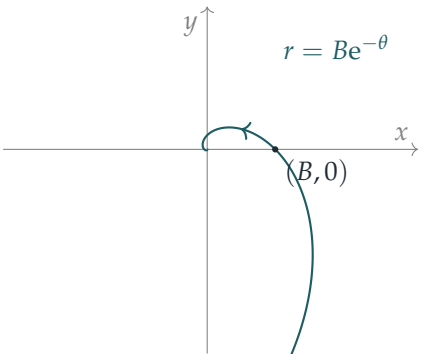
$$\begin{aligned}(y+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - (y-x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} &= \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)\\ &= r^2 + rr'.\end{aligned}$$

よって方程式は $r(r' + r) = 0$ となり、$r > 0$ なので r で割ることができて

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} + r = 0,$$

を得る。これが求める式である。

これは変数分離形（separable）である（あるいは単に指数関数的減衰と見抜けばよい）。$r = B\mathrm{e}^{-\theta}$（$B > 0$）となる。これは**等角螺旋**（equiangular spiral）、すなわち対数螺旋（logarithmic spiral）である。θ が増加すると、曲線は反時計回りに原点へと巻き込んでいくが、原点に到達することはない。θ が減少すると、限りなく外側へ巻き広がっていく。$r/r' = -1$ であるから、曲線は原点から出るすべての半直線と同じ角度、すなわち内向きの動径に対して 45° の角度で交わる。$B\mathrm{e}^{-\theta} = \mathrm{e}^{-(\theta - \ln B)}$ であるから、B の値が異なる曲線は同じ螺旋を回転させたものである。



矢印は θ が増加する向きを示す。螺旋は 1 周ごとに $\mathrm{e}^{2\pi} \approx 535$ 分の 1 に縮むので、どの縮尺で見てもおよそ 1 周分しか見えず、残りは原点のまわりにぎっしりと詰まっている。

小問 (ii)

今度は $P = y + x - x(x^2 + y^2)$、$Q = y - x - y(x^2 + y^2)$ であり、$x^2 + y^2 = r^2$ である。新しい項の寄与は

$$-r^2\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right) = -r^2 \cdot r^2 = -r^4,$$

であるから、もとの項には小問 (i) の結果を用いると、方程式は

$$r^2 + rr' - r^4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r^3 - r,$$

となる。ここでもまた $r > 0$ で割った。

考えてみよう 方程式が線形になるのを妨げている r^3 の項はどう扱えばよいだろうか。

これはベルヌーイ型微分方程式である。目標の答えは r^2 を用いて表されているので、$u = r^{-2}$ を使って計算することが示唆される。すると

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -2r^{-3}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2r^{-3}(r^3 - r) = -2 + 2u.$$

となる。よって $u' - 2u = -2$ であり、これは定数係数の線形微分方程式である。$u = 1$ が特殊解（particular solution）であり、$A\mathrm{e}^{2\theta}$ が斉次方程式（homogeneous equation）の解であるから

$$\frac{1}{r^2} = 1 + A\mathrm{e}^{2\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 = \frac{1}{1 + A\mathrm{e}^{2\theta}},$$

を得る。これが求める形である。（変数分離をして $\dfrac{1}{r(r-1)(r+1)}$ を部分分数（partial fractions）に分解しても同じ結果が得られるが、手間が多くかかる。）曲線は $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 0$ となるところでのみ存在する。

解曲線の形

まず、$A = \pm\mathrm{e}^{-2\alpha}$ ならば $A\mathrm{e}^{2\theta} = \pm\mathrm{e}^{2(\theta-\alpha)}$ であるから、A に対する曲線は $A = \pm 1$ に対する曲線を α だけ回転させたものであることに注意する。したがって、A の符号に応じて、本質的には 3 種類の形しかない。

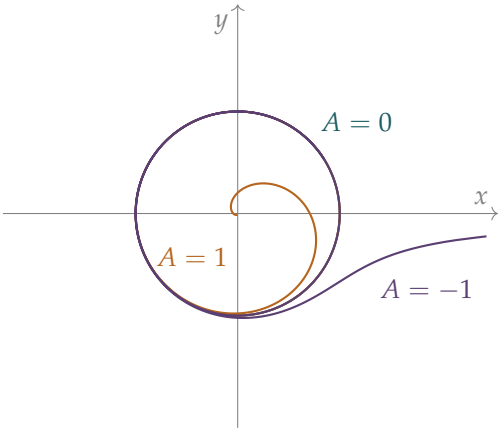
- $A = 0$ のとき：$r = 1$ であり、単位円である。
- $A > 0$ のとき：$1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 1$ であるから $r < 1$ であり、曲線はすべての θ に対して定義される。$r' = r(r^2 - 1) < 0$ であるから、r は単調に減少する。$\theta \to -\infty$ のとき $r \to 1$ であるから、曲線は内側から単位円に向かって巻き広がっていく。$\theta \to +\infty$ のとき $r \approx A^{-1/2}\mathrm{e}^{-\theta} \to 0$ であるから、曲線は原点へと螺旋状に巻き込んでいき、次第に小問 (i) の螺旋に似てくる。

- $A < 0$ のとき：$\mathrm{e}^{2\theta} < -1/A$、すなわち $\theta < \theta_0 = \frac{1}{2}\ln(-1/A)$ が必要である。このとき $r > 1$ かつ $r' > 0$ である。$\theta \to -\infty$ のとき上から $r \to 1$ となるので、曲線は外側から単位円に向かって巻き込んでいく。$\theta \to \theta_0^-$ のとき $r \to \infty$ である。θ_0 の近くでは（$A\mathrm{e}^{2\theta_0} = -1$ であるから）$1 + A\mathrm{e}^{2\theta} \approx 2(\theta_0 - \theta)$ となるので $r \approx \big(2(\theta_0 - \theta)\big)^{-1/2}$ であり、曲線から直線 $\theta = \theta_0$ までの距離は

$$r\sin(\theta_0 - \theta) \approx r(\theta_0 - \theta) \approx \frac{1}{2r} \to 0.$$

  である。よって曲線は、原点を通り角 θ_0 をなす直線を漸近線（asymptote）として、時計回り側からそれに近づきながら無限遠へと向かう。$A = -1$ のときは $\theta_0 = 0$ であり、x が大きいところで曲線は $y = -\frac{1}{2x}$ に近づく。

単位円はリミットサイクル（limit cycle）である。他のすべての解は、$\theta \to -\infty$ のとき単位円に向かって螺旋状に近づき、θ が増加するにつれて単位円から離れていく。



紫の曲線（$A = -1$）は、正の x 軸に沿ってそのすぐ下側を無限遠へと延びていく。

検算

- $r = B\mathrm{e}^{-\theta}$ を (i) のもとの方程式にいくつかの点で代入し戻す（x、y および $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ に変換する）と、0 になる。(ii) の式についても、正負両方の符号のいくつかの A の値で同様である。
- $A = 0$ のとき $r = 1$ となり、実際、定数 $r = 1$ は $r' = r^3 - r$ を満たす。x、y で見ると、円 $x^2 + y^2 = 1$ 上では追加された項がもとの項をちょうど打ち消す。
- $r(0) = \frac{1}{2}$（すなわち $A = 3$）から出発すると、式から $r(2) = 1/\sqrt{1 + 3\mathrm{e}^4} \approx 0.0779$ が得られ、これは $r' = r^3 - r$ を逐次的に数値計算して得た解と小数点以下何桁にもわたって一致する。

- $A = -1$、$\theta = -10^{-4}$ のとき $r \approx 70.71$ であり、x 軸までの距離は $0.00707 \approx 1/(2r)$ となって、漸近線であることが確かめられる。

よくある間違い

- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ は r も変化するものとして $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)$ として求めなければならないことを忘れる。すなわち r' の項を落としてしまう。
- $A < 0$ のときの制限 $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 0$ を見落とし、そのためこれらの曲線が有限の角度で無限遠へ向かうことに気づかない。
- A の各符号について曲線を 1 本ずつしか描かず、他の曲線がそれを回転させたものであることを述べない。

STEP のその先へ

方程式 $r' = r^3 - r$ は平面力学系（dynamical system）を極座標で見たものであり、単位円は**リミットサイクル**、すなわち近くの軌道が螺旋状に近づいたり遠ざかったりする孤立した閉軌道である。このように動径方向の方程式が分離する系は、非線形微分方程式や相平面解析（phase-plane analysis）の講義で最初に扱われる標準的な例であり、ポアンカレ＝ベンディクソン（Poincaré–Bendixson）の定理へとつながっていく。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）には、非線形系とリミットサイクルについての優れた章がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。