解答例

# STEP III 2015、第 7 問

純粋数学 ・ 微分作用素

> **STEP III 2015、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q7

## 鍵となる考え方

$x$ の累乗は $\mathrm{D} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ の固有関数（eigenfunction）である。すなわち、D を $x^a$ に作用させると、単に $a$ 倍されるだけである。したがって $\mathrm{D}^n$ は多項式（polynomial）に項ごとに作用し、$x^r$ の係数を $r^n$ 倍する。最後の和に現れる $r^n$ はまさにここから来ている。割り切れること（divisibility）については、D を 1 回作用させるごとに、因数 $(1-x)$ の指数は高々 1 しか下がらないことに注目する。

## 解答

### 冒頭の結果

任意の定数 $a$ に対して（$a$ が整数でないときは $x > 0$ とする）、

$$\mathrm{D}x^a = x \cdot ax^{a-1} = ax^a.$$

もう一度 D を作用させ、定数 $a$ を外に出してこの結果を用いると、

$$\mathrm{D}^2x^a = \mathrm{D}(ax^a) = a\,\mathrm{D}x^a = a^2x^a,$$

となり、求める結果が得られる。D は線形（linear）である（定数 $\alpha, \beta$ に対して $\mathrm{D}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathrm{D}f + \beta\,\mathrm{D}g$）から、この操作を繰り返せば、数学的帰納法（induction）により

$$\mathrm{D}^n x^a = a^n x^a \qquad (n \geq 1).$$

が成り立つ。

### 小問 (i)

$c_r \neq 0$ として $\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k x^k$ と書く。線形性と上の結果より、

$$\mathrm{D}^n \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k \, k^n x^k.$$

これは $x^r$ より高次の項をもたない多項式であり、その $x^r$ の係数は $r^n c_r$ である。$r \geq 1$ より $r^n \neq 0$ であり、また $c_r \neq 0$ であるから $r^n c_r \neq 0$ である。よって $\mathrm{D}^n \mathrm{P}(x)$ は次数（degree）がちょうど $r$ の多項式である。

（条件 $r \geq 1$ は重要である。$0^n = 0$ であるから、定数多項式は 0 に写されてしまう。）

### 小問 (ii)

$m$ を固定する。$n$ に関する帰納法により、$1 \leq n \leq m$ に対して

$$\mathrm{D}^n (1-x)^m = (1-x)^{m-n} \mathrm{Q}_n(x) \quad \text{を満たす多項式} \mathrm{Q}_n.$$

が存在することを証明する。

**基本ステップ。** $\mathrm{D}(1-x)^m = x \cdot (-m(1-x)^{m-1}) = (1-x)^{m-1} \cdot (-mx)$ であるから、$\mathrm{Q}_1(x) = -mx$ である。

**帰納ステップ。** ある $n$ について、$n < m$ のもとで主張が成り立つと仮定する。このとき $m - n \geq 1$ である。積の微分法則（product rule）より、

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{n+1}(1-x)^m &= x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big[ (1-x)^{m-n} \mathrm{Q}_n(x) \Big] \\
&= x \Big[ -(m-n)(1-x)^{m-n-1} \mathrm{Q}_n(x) + (1-x)^{m-n} \mathrm{Q}_n'(x) \Big] \\
&= (1-x)^{m-n-1} \cdot x \Big[ (1-x)\mathrm{Q}_n'(x) - (m-n)\mathrm{Q}_n(x) \Big].
\end{aligned}$$

角括弧の中は多項式であるから、$\mathrm{Q}_{n+1}(x) = x[(1-x)\mathrm{Q}_n'(x) - (m-n)\mathrm{Q}_n(x)]$ とおけば、これは求める形になっている。

> **考えてみよう** 帰納ステップのどこで $n < m$ を用いたか？

因数 $(1-x)^{m-n-1}$ をくくり出すことが多項式の因数として意味をもつのは、$m - n - 1 \geq 0$、すなわち $n < m$ のときに限る。$n = m$ では、失うべき $(1-x)$ の因数がもう残っていないので、帰納法は（正しく）そこで止まる。

以上より、すべての正の整数 $n < m$ に対して、$\mathrm{D}^n (1-x)^m$ は $(1-x)^{m-n}$ で割り切れる。

**小問 (iii)**

二項定理（binomial theorem）により展開する：

$$(1-x)^m = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} x^r.$$

小問 (i) とまったく同様に、$\mathrm{D}^n$ を項ごとに作用させると、

$$\mathrm{D}^n(1-x)^m = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} r^n x^r.$$

$n < m$ であるから、小問 (ii) より左辺は $(1-x)^{m-n}\mathrm{Q}_n(x)$（ただし $m-n \geq 1$）に等しく、したがって $x = 1$ で値が零になる。ゆえに右辺で $x = 1$ とおくと

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} r^n = 0,$$

となり、求める結果が得られる。（$r = 0$ の項は $0^n = 0$ であり、D が定数項を消すことと整合している。）

## 検算

$m = 3, n = 2$ とすると、和は $0 - 3\cdot 1 + 3\cdot 4 - 1\cdot 9 = 0$ である。$m = 4, n = 3$ とすると $0 - 4 + 6\cdot 8 - 4\cdot 27 + 64 = 0$ である。この恒等式はコンピュータによっても $1 \leq n < m \leq 19$ のすべてについて確認されており、さらに $(1-x)^{m-n}$ が $\mathrm{D}^n(1-x)^m$ を割り切るちょうどの累乗であることも $m \leq 11$ について確認されている。対照的に、$n = m$ のときは和はもはや零ではない。$m = 2$ のときは $0 - 2 + 4 = 2 = 2!$ であり、一般には $(-1)^m m!$ となる。

## よくある間違い

- $\mathrm{D}^2 x^a$ を $x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} x^a = a(a-1)x^a$ と書いてしまう。$\mathrm{D}^2$ は D を 2 回作用させたものであって、$x^2$ と 2 階導関数（second derivative）の積ではない。
- 小問 (i) で、最高次の係数 $r^n c_r$ が零でない理由を述べ忘れる。$r \geq 1$ を使うのはまさにここである。
- 小問 (iii) で、$\mathrm{D}^n$ を作用させる前に $(1-x)^m$ に $x = 1$ を代入してしまう。要点は、因数 $(1-x)$ が $n < m$ 回の作用を経ても残ることにある。

## STEP のその先へ

作用素 $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ はオイラー作用素（Euler operator）と呼ばれることがあり、$x^a$ は固有値（eigenvalue）$a$ に対する固有関数である。これは $x^2y'' + bxy' + cy = 0$ のようなオイラー・コーシー方程式（Euler–Cauchy equation）を扱うための自然な道具であり、これらの方程式は $x = e^t$ とおくと定数係数の方程式になる。小問 (iii) の恒等式は、次数が $m$ 未満の多項式の $m$ 階差分（finite difference）が零であることを述べており、スターリング数（Stirling numbers）や、包除原理（inclusion–exclusion）による全射（surjection）の数え上げと密接に関係している。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式入門）はオイラー方程式を扱っている。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この種の問題がさらに多く載っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。