解答例

STEP III 2015、第 6 問

純粋数学 • 解の対称式

> **STEP III 2015、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q6

鍵となる考え方

w, z の組に関するすべては、その和と積によって決まる。w と z は $t^2-(w+z)t+wz=0$ の 2 つの根（roots）だからである。すると小問 (i) は、実数係数の二次方程式（quadratic）がいつ実数解をもつかについての主張となり、条件 $u^2 \leq 2v$ は形を変えた判別式（discriminant）にほかならない。小問 (ii) では、最初の 2 つの方程式から積 wz が定まり、3 つ目の方程式は u だけの三次方程式（cubic）となる。しかもその根の 1 つはすぐに見つけられる。

解答

小問 (i)

すべてを動かす恒等式（identity）は次である。

$$2v-u^2=2(w^2+z^2)-(w+z)^2=w^2-2wz+z^2=(w-z)^2.$$

また、$wz=\frac{1}{2}((w+z)^2-(w^2+z^2))=\frac{1}{2}(u^2-v)$ であることにも注意しておく。

w と z が実数のとき：このとき $u=w+z$ と $v=w^2+z^2$ は当然実数であり、$w-z$ が実数なので $2v-u^2=(w-z)^2\geq 0$ である。よって $u^2\leq 2v$ が成り立つ。

逆に、u と v が実数で $u^2\leq 2v$ であると仮定する。このとき $p=wz=\frac{1}{2}(u^2-v)$ も実数である。

$$(t-w)(t-z)=t^2-ut+p,$$

であるから、w と z はちょうど、実数係数の二次方程式 $t^2-ut+p=0$ の 2 つの根で

ある。その判別式は

$$u^2 - 4p = u^2 - 2(u^2 - v) = 2v - u^2 \geq 0,$$

であるから、2つの根はともに実数である。したがって w と z は実数であり、これで同値性（equivalence）の証明が完了する。

考えてみよう なぜ「u と v が実数である」だけでは不十分なのだろうか？

共役複素数の組（conjugate pair）も、和と2乗の和はともに実数になるからである。例えば $w = 1 + 2\mathrm{i}, z = 1 - 2\mathrm{i}$ とすると $u = 2, v = -6$ となり、どちらも実数であるが、$u^2 = 4 > -12 = 2v$ である。この不等式こそが、実数でない共役複素数の組を排除しているのである。

小問 (ii)

三次方程式への帰着。1つ目の方程式は $u = w + z$ を意味する。$v = w^2 + z^2$ とおくと、2つ目の方程式は $v = u^2 - \frac{2}{3}$ となるので、

$$wz = \tfrac{1}{2}(u^2 - v) = \tfrac{1}{3}.$$

3乗については、よく知られた恒等式

$$w^3 + z^3 = (w + z)^3 - 3wz(w + z) = u^3 - u.$$

を用いる。したがって3つ目の方程式は $u^3 - u - \lambda u = -\lambda$、すなわち

$$u^3 - (1 + \lambda)u + \lambda = 0.$$

となる。$u = 1$ を代入すると $1 - 1 - \lambda + \lambda = 0$ となるので、$u - 1$ は因数であり、

$$u^3 - (1 + \lambda)u + \lambda = (u - 1)(u^2 + u - \lambda).$$

である。

根の個数を数える。$\lambda > 0$ であるから、二次の因数の判別式は $1 + 4\lambda > 0$ である。よって相異なる2つの実数解

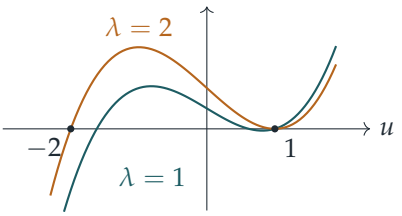
$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}.$$

をもつ。このうちの1つが1に等しくなるのは、$1^2 + 1 - \lambda = 0$、すなわち $\lambda = 2$ のときに限る。したがって次のようになる。

- $\lambda \neq 2$ のとき、u のとりうる値は1と $\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}\right)$ であり、相異なる3つの値で、すべて実数である。

- $\lambda = 2$ のとき、三次式は $(u-1)^2(u+2)$ となり、値は $u = 1$ と $u = -2$ の 2 つだけである。

これらの値はいずれも実際に現れる。u が与えられたとき、w と z を $t^2 - ut + \frac{1}{3} = 0$ の根とすればよい。すると $w + z = u$ かつ $wz = \frac{1}{3}$ であり、上の手順を逆にたどれば 3 つの方程式がすべて成り立つことがわかる。よって例外となる値は $\lambda = 2$ である。



この概形図（縦方向に縮小してある）は $u^3 - (1+\lambda)u + \lambda$ を示している。$\lambda = 1$ のときは軸と 3 か所で交わり、$\lambda = 2$ のときは曲線が $u = 1$ で軸にちょうど接している。

w と z は必ず実数か？ そうではない。u は実数であり $v = u^2 - \frac{2}{3}$ も実数であるから、小問 (i) により、w と z が実数であるための必要十分条件は $u^2 \le 2v = 2u^2 - \frac{4}{3}$、すなわち $u^2 \ge \frac{4}{3}$ である。根 $u = 1$ はどの λ に対しても存在し、$1 < \frac{4}{3}$ であるから、この根からは常に実数でない w と z が得られる。

具体的には、$u = 1$ のとき $t^2 - t + \frac{1}{3} = 0$ となるので、

$$w = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}, \qquad z = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}.$$

である。確かめておくと、$w + z = 1 = u$ であり、$wz = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ であるから $w^2 + z^2 = 1 - \frac{2}{3} = u^2 - \frac{2}{3}$ である。さらに $w^3 + z^3 = u^3 - 3wz\,u = 1 - 1 = 0$ であるから、すべての $\lambda > 0$ に対して $w^3 + z^3 - \lambda u = -\lambda$ が成り立つ。これが反例（counterexample）である。u の 3 つの値はすべて実数であるが、w と z は実数であるとは限らない。

検算

- $\lambda = 1$ のとき、u の値は 1 と $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}) \approx 0.618, -1.618$ であり、いずれも $u^3 - 2u + 1 = 0$ を満たす。
- $\lambda = 2$ のとき、三次式 $u^3 - 3u + 2$ は $u = -2$ で 0 になり（$-8 + 6 + 2 = 0$）、$u = 1$ ではこの式とその導関数（derivative）$3u^2 - 3$ がともに 0 になる。これにより重根（double root）であることが確認できる。
- 多数の λ の値についてコンピュータで検証し、各 u から w と z を構成して、3 つの

方程式がすべて丸め誤差の範囲で成り立つことを確認した。また、$\lambda = 2$ の場合を除いて u が相異なる 3 つの値をとることも確認した。

よくある間違い

- 小問 (i) で一方向しか証明しないこと。逆を示すには積 wz が実数であることが必要であり、そこで v が実数であることが使われる。
- 二次式の根が 1 と異なることの確認を忘れ、例外の値 $\lambda = 2$ を見落とすこと。
- u が実数だから w と z も実数に違いないと思い込むこと。w と z の実数値の対称式は、共役複素数の組とも同じように両立する。

STEP のその先へ

2 つの数の組（あるいは任意の数の集合）がその対称式によって決まるという考え方は、対称多項式（symmetric polynomials）の理論の出発点である。w と z のどんな対称多項式も $w + z$ と wz で表すことができ、ニュートン（Newton）の恒等式（Newton's identities）は $w^3 + z^3$ のようなべき和をそれらと結びつける。同じ推論を判別式とともに用いれば、実数係数の多項式の根がすべて実数となるのはいつかを判定できる。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に解説した本）は複素数を学ぶ上で素晴らしい友となる一冊であり、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）は対称多項式をさらに深く扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。