解答例

STEP III 2015、第 5 問

純粋数学 • 無限降下法による無理性の証明

STEP III 2015、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s3-q5

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.3 節「**最小の反例**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/well-ordering.html

鍵となる考え方

これは**無限降下法**（infinite descent）による証明である。もし $\sqrt{2}$ が有理数（rational）であれば、掛けると $\sqrt{2}$ を整数にするような最小の正の整数が存在するはずであり、そこからさらに小さいものを構成するのである。この役目を果たすのが $\sqrt{2}-1$ を掛けることである。これは 0 と 1 の間の数であり、しかも集合の中から外に出ないからである。2 の立方根の場合、同じ手法を使うには $2^{2/3}$ の情報も保持する集合が必要になる。問題が最初に二つの数を結びつけるよう求めているのはそのためである。

解答

小問 (i)

ステップ 3. ステップ 1 の仮定により、ある整数 p, q（ただし $q \neq 0$）を用いて $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ と書ける。$\sqrt{2} > 0$ であるから、p と q はともに正にとってよい。このとき

$$q\sqrt{2} = p$$

は整数であり、q は正の整数であるから、$q \in S$ である。よって S は空ではない。

ステップ 5. $k \in S$ であるから、数 $m = k\sqrt{2}$ は整数である。$n = (\sqrt{2}-1)k$ について二つのことを確かめる必要がある。

- n は正の整数である：$n = k\sqrt{2} - k = m - k$ は整数の差であり、$k > 0$ かつ $\sqrt{2} > 1$ であるから $n > 0$ である。
- $n\sqrt{2}$ は整数である：

$$n\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)k\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2} = 2k - m,$$

これもやはり整数の差である。

したがって $(\sqrt{2} - 1)k \in S$ である。

ステップ 6. $1 < \sqrt{2} < 2$（$1 < 2 < 4$ による）であるから $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ であり、$k > 0$ より

$$(\sqrt{2} - 1)k < k.$$

したがってステップ 5 により、k より小さい S の正の整数が得られる。これはステップ 4 で k を S の最小元として選んだことに矛盾する。（ステップ 4 は正当である。空でない正の整数の集合には必ず最小元が存在し、ステップ 3 で S が空でないことを示したからである。）置いた仮定はステップ 1 のみであるから、それが誤りでなければならない。すなわち $\sqrt{2}$ は無理数（irrational）である。

小問 (ii)

$a = 2^{1/3}$ とおく。すると $a^2 = 2^{2/3}$ かつ $a^3 = 2$ である。

同値性。a が有理数ならば、有理数の積である a^2 も有理数である。逆に、a^2 が有理数ならば、$a^2 \neq 0$ であるから

$$a = \frac{a^3}{a^2} = \frac{2}{a^2}$$

は有理数である。よって $2^{1/3}$ が有理数であることと $2^{2/3}$ が有理数であることは同値である。

無理性。矛盾を導くために、a が有理数であると仮定する。同値性により、a^2 も有理数である。na と na^2 がともに整数となるような正の整数 n 全体の集合を T と定める。

> **考えてみよう** $S = \{n : na \text{ が整数}\}$ として小問 (i) をそのまま写せばよいのではないか？

小問 (i) では、$(\sqrt{2} - 1)k \in S$ を確かめる際に $k(\sqrt{2})^2 = 2k$ が整数であることが必要だったが、これは自動的に成り立っていた。ここでは、$(a - 1)k$ に a を掛けると $ka^2 - ka$ となるが、「ka が整数である」という条件には ka^2 が整数であることを保証するものは何もない。そこでその条件を集合の定義に組み込むのであり、ここで小問の前半が必要になる。

T は空でない。 p, q を正の整数として $a = \frac{p}{q}$ と書く。すると $q^2 a = pq$ と $q^2 a^2 = p^2$ は整数であるから、$q^2 \in T$ である。

降下。 k を T の最小元とすると、$u = ka$ と $v = ka^2$ は整数である。$n = (a-1)k$ を考える。

- $n = u - k$ は整数であり、$a > 1$（$1^3 < 2$ による）であるから $n > 0$ である。
- $na = ka^2 - ka = v - u$ は整数である。
- $a^3 = 2$ を用いると、$na^2 = ka^3 - ka^2 = 2k - v$ は整数である。

したがって $n \in T$ である。ところが $a < 2$（$2^3 = 8 > 2$ による）であるから $0 < a - 1 < 1$ となり、$n = (a-1)k < k$ である。これは k の最小性に矛盾する。よって $2^{1/3}$ は無理数であり、同値性により $2^{2/3}$ も無理数である。

検算

- 「惜しい例」で降下を試してみる。分数 $\frac{7}{5}$ は $\sqrt{2}$ に近い。ステップ 5 の写像 $(k, m) \mapsto (m - k, 2k - m)$ は $(5, 7)$ を $(2, 3)$ に移し、$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1 = -(7^2 - 2 \cdot 5^2)$ である。量 $m^2 - 2k^2$ は符号が変わるだけなので、もしこれが 0（すなわち $m = k\sqrt{2}$）であれば、k が小さくなり続ける間ずっと 0 のままであることになるが、それは不可能である。
- 数値的には $\sqrt{2} - 1 \approx 0.414$、$2^{1/3} - 1 \approx 0.260$ であり、降下に必要なとおり、どちらも 0 と 1 の間に厳密に収まっている。
- $n \leq 2 \times 10^5$ のすべての n についてコンピュータで探索すると、$2n^2$ が平方数（perfect square）となる n も、$2n^3$ または $4n^3$ が立方数（perfect cube）となる n も見つからない。

よくある間違い

- $(\sqrt{2} - 1)k$ が**正**であることを示し忘れる。S は正の整数しか含まないので、これは必要である。
- 小問 (ii) で、na だけで定義した集合を用いておきながら、根拠なく ka^2 が整数であると主張する。
- 最小元 k がなぜ存在するのかを述べない。そのためには S（あるいは T）が空でないことが必要であり、それこそがステップ 3 の目的である。

STEP のその先へ

この議論の本質は正の整数の整列性(well-ordering)、すなわち数学的帰納法(induction)の背後にある原理であり、一般化することができる。$\sqrt[r]{N}$ が整数でなければ、それは無理数である。このことは、$n\alpha, n\alpha^2, \ldots, n\alpha^{r-1}$ がすべて整数となるような n 全体の集合を考え、その最小元に $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor$ を掛けることでわかる。この数は 0 と 1 の間に厳密に収まるからである。代数学の最初の講義では、これは整数全体が**整閉**（integrally closed）な環（ring）をなすという主張になる。すなわち、整数係数のモニック多項式（monic polynomial）の有理数解は整数でなければならない。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）は、整数とその性質についてさらに学ぶのにうってつけの一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。