解答例

STEP III 2015、第 4 問

純粋数学 • 3 次方程式の解

STEP III 2015、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s3-q4

鍵となる考え方

小問 (iii) の三つの条件は三角関数のパズルのように見えるが、どれも何かの虚部（imaginary part）になっている。すなわち、$z_k = r_k e^{i\theta_k}$ とおけば、$r_k^n \sin(n\theta_k)$ は z_k^n の虚部である。したがってこれらの条件は、三つの複素数の冪和（power sum）S_1, S_2, S_3 が実数であることを述べている。小問 (ii) によって実数の冪和は実数係数の 3 次式（cubic）に変換され、さらに小問 (i) によって実数解が得られる。

解答

小問 (i)

実数 x に対して $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおく。これは連続な実関数である。$R = 1 + |a| + |b| + |c|$ とおく。$x \geq R$ のとき $x \geq 1$ であるから $|x| \leq x^2$ かつ $1 \leq x^2$ であり、$|ax^2 + bx + c| \leq (|a| + |b| + |c|)x^2$ が成り立つ。よって

$$f(x) \geq x^3 - (|a| + |b| + |c|)x^2 = x^2(x - |a| - |b| - |c|) > 0.$$

同様に、$x \leq -R$ のとき $f(x) \leq -|x|^2(|x| - |a| - |b| - |c|) < 0$ が得られる。ゆえに $f(-R) < 0 < f(R)$ であり、中間値の定理（intermediate value theorem）により f は $-R$ と R の間に零点をもつ。この零点が $(*)$ の実数解である。

（同じことを別の言い方で述べると、実数係数の多項式の虚数解は共役（conjugate）な組として現れ、三つの解をすべて組にすることはできない。）

小問 (ii)

z_1, z_2, z_3 が解であるから

$$z^3 + az^2 + bz + c = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

であり、係数を比較すると

$$a = -(z_1 + z_2 + z_3), \qquad b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1, \qquad c = -z_1z_2z_3.$$

を得る。よって $a = -S_1$ である。和を2乗すると $S_1^2 = S_2 + 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = S_2 + 2b$ であるから

$$a = -S_1, \qquad b = \tfrac{1}{2}(S_1^2 - S_2).$$

c については、S_1^3 を展開する代わりに、各解が方程式を満たすことを用いる。すなわち $k = 1, 2, 3$ に対して $z_k^3 + az_k^2 + bz_k + c = 0$ である。これら三つの式を足し合わせると

$$S_3 + aS_2 + bS_1 + 3c = 0.$$

a と b を代入して2倍すると

$$\begin{aligned} 6c &= -2S_3 + 2S_1S_2 - S_1(S_1^2 - S_2) \\ &= -S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iii)

$k = 1, 2, 3$ に対して $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ と定める。ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）により $z_k^n = r_k^n(\cos n\theta_k + i \sin n\theta_k)$ であるから、与えられた三つの条件はちょうど

$$\operatorname{Im} S_1 = \operatorname{Im} S_2 = \operatorname{Im} S_3 = 0,$$

を意味する。ここで S_1, S_2, S_3 は小問 (ii) と同様に z_1, z_2, z_3 の冪和である。よって S_1, S_2, S_3 はすべて実数である。

> **考えてみよう** 小問 (ii) は3次方程式から出発した。ここでの3次方程式はどこにあるのか？

それは自分で作る。$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + az^2 + bz + c$ によって a, b, c を定める。すると z_1, z_2, z_3 はこの3次方程式の解であるから、小問 (ii) が適用でき

$$a = -S_1, \qquad b = \tfrac{1}{2}(S_1^2 - S_2), \qquad c = \tfrac{1}{6}(-S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3),$$

を得る。これらはすべて実数である。小問 (i) によりこの3次方程式は実数解をもち、その解は z_1, z_2, z_3 のみであるから、ある z_k は実数である。ところで $r_k > 0$ のと

き $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ が実数となるのは $\sin\theta_k = 0$、すなわち θ_k が π の整数倍のときに限る。$-\pi < \theta_k < \pi$ の範囲でそのような値は $\theta_k = 0$ のみである。よって少なくとも一つの k について $\theta_k = 0$ である。

ここで $\theta_1 = 0$ と仮定すると、$z_1 = r_1$ は 0 でない実数である。このとき

$$z_2 + z_3 = S_1 - z_1 \quad \text{かつ} \quad z_2 z_3 = \frac{-c}{z_1}$$

はともに実数である。よって z_2 と z_3 は実数係数の 2 次方程式 $z^2 - (z_2 + z_3)z + z_2 z_3 = 0$ の解である。場合は二つある。

- 解が虚数であるとき、それらは互いに共役な複素数である。すなわち $z_3 = \overline{z_2} = r_2 e^{-i\theta_2}$。$-\theta_2$ もまた $(-\pi, \pi)$ に属し、この区間における偏角（argument）は一意であるから、$\theta_3 = -\theta_2$（かつ $r_3 = r_2$）である。
- 解が実数であるとき、上と全く同様に（どちらも正の絶対値（modulus）をもち、偏角は $(-\pi, \pi)$ にある）$\theta_2 = \theta_3 = 0$ を得るので、やはり $\theta_2 = -\theta_3$ である。

いずれの場合も $\theta_2 = -\theta_3$ であり、示すべきことが示された。

検算

- 解を 1, 2, 3 として小問 (ii) を確かめる：$S_1 = 6$, $S_2 = 14$, $S_3 = 36$ であり、$-216 + 252 - 72 = -36 = 6c$ から $c = -6$ となる。これは $(z-1)(z-2)(z-3)$ について正しい値である。
- 小問 (iii) の逆向き：$\theta_1 = 0, \theta_3 = -\theta_2, r_3 = r_2$ のとき、各和の第 2 項と第 3 項は打ち消し合い、第 1 項は 0 であるから、三つの条件はすべて成り立つ。また、数千個のランダムな初期値から三つの条件を数値的に解くコンピュータ探索を行ったところ、見つかった解はどれも、一つの角が 0 で残り二つが互いに符号の反対なものだけであった。

よくある間違い

- 小問 (i) で、根拠を示さずに「3 次関数のグラフは必ず軸と交わる」と述べること。$|x|$ が大きいところでの符号の変化には、一行の議論が必要である。
- 小問 (iii) で、$\theta_k = \pm\pi$ のときにも z_k が実数になることを忘れること。これを除外するのは開区間 $(-\pi, \pi)$ であることである。
- 共役の場合だけから $\theta_2 = -\theta_3$ を結論し、z_2, z_3 がともに実数である場合を見落とすこと。

STEP のその先へ

多項式の係数はその解の基本対称式（elementary symmetric functions）であり、小問 (ii) の恒等式は、それらを冪和と結びつけるニュートンの恒等式（Newton's identities）の最初のものである。代数学の入門課程では、解についてのあらゆる対称式が基本対称式の多項式として表されることを学ぶ。これはガロア理論（Galois theory）の出発点である。この話題については Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）がよい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。