解答例

STEP III 2015、第 3 問

純粋数学 • 極方程式の曲線と面積

> **STEP III 2015、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q3

鍵となる考え方

$r\cos\theta = x$ であるから、曲線 $r = a\sec\theta$ は単に直線 $x = a$ にほかならない。したがって $r - a\sec\theta$ は、原点から角 θ の方向に伸びる半直線（ray）に沿って、点がその半直線と直線との交点からどれだけ離れているかを測る量であり、方程式はこの距離が b であることを述べている。これはまさに、極（pole）を定点とするコンコイド（conchoid）の定義である。概形を描くには、絶対値（modulus）を外して $r = a\sec\theta + b$ と $r = a\sec\theta - b$ に分け、それぞれについて θ のどの値で $r \geq 0$ となるかを考えればよい。

解答

以下を通じて、$\sec\theta$ は $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ で定義されないので、これらの角は除外する。絶対値を外すと、$(*)$ は

$$r = a\sec\theta + b \qquad \text{または} \qquad r = a\sec\theta - b,$$

を意味し、いずれの場合も $r \geq 0$ が必要である。

小問 (i)

$\sec\theta > 0$ **となる理由**。 $\sec\theta < 0$ と仮定する。すると $|\cos\theta| \leq 1$ より $\sec\theta \leq -1$ となり、$a\sec\theta \leq -a$ である。このとき r のとりうる二つの値はいずれも、$a > b$ を用いると

$$r = a\sec\theta \pm b \leq -a + b < 0,$$

を満たす。これは $r \geq 0$ に矛盾するので、$(*)$ を満たすすべての点で $\sec\theta > 0$、すなわち $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

コンコイド。A を極 O、L を直線 $x = a$（極形式では $r\cos\theta = a$、すなわち $r = a\sec\theta$）、$d = b$ とする。$a > 0$ であるから、A は L 上にないことに注意する。

P を $(*)$ を満たす偏角 θ の点とすると、$\cos\theta > 0$ である。直線 OP は L に平行でなく、同じ半直線上にあって $OQ = a\sec\theta$ となる点 Q、すなわち直交座標で $Q = (a, a\tan\theta)$ において L と交わる。O、Q、P はすべて O から出る一本の半直線上にあり、O からの距離はそれぞれ $a\sec\theta$ と r であるから、

$$PQ = |r - a\sec\theta| = b.$$

したがって P は、$A = O$ を通る直線に沿って測って L から距離 b の位置にある。すなわち、この L、A、$d = b$ に対するニコメデス（Nicomedes）のコンコイド上にある。

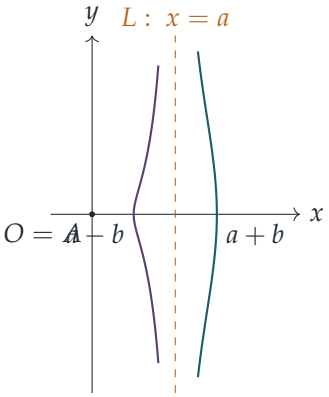
（逆に、そのコンコイド上のすべての点は $(*)$ を満たす。O を通り L と Q で交わる任意の直線上で、Q から距離 b にある二点は、半直線 OQ に沿って O から距離 $a\sec\theta \pm b$ の位置にあり、$a\sec\theta \geq a > b$ であるから両方とも正である。したがって軌跡（locus）はコンコイド全体である。）

概形。直交座標では $x = r\cos\theta = a \pm b\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ である。$r - a\sec\theta = \pm b$ に $\cos\theta$ を掛けると $x - a = \pm b\cos\theta = \pm bx/r$ となるので、曲線は

$$(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2.$$

である。枝は二つあり、どちらも x 軸に関して対称であり（θ を $-\theta$ に置き換えればよい）、どちらも $r \to \infty$ となる $\theta \to \pm\frac{\pi}{2}$ において L に漸近する（asymptotic）。

- 外側の枝 $r = a\sec\theta + b$。$x = a + b\cos\theta \in (a, a+b]$ であり、軸と $(a+b, 0)$ で交わる。
- 内側の枝 $r = a\sec\theta - b$。$x = a - b\cos\theta \in [a-b, a)$ であり、軸と $(a-b, 0)$ で交わる。この点は O の右側にある。



（図は $a=2$、$b=1$ の場合であり、外側の枝をティール、内側の枝をプラムで示す。）

小問 (ii)

今度は $a<b$ とする。二つの場合をもう一度調べ、$r\geq 0$ となるところを確かめる。

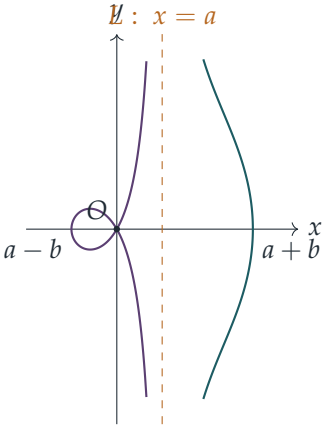
- $r=a\sec\theta+b$ の場合。$\sec\theta>0$ ならばこれは常に正であり、以前と同じ外側の枝で、L の右側にある。$\sec\theta<0$ ならば、$r\geq 0$ となるのはちょうど $-a\sec\theta\leq b$、すなわち $|\sec\theta|\leq b/a$、すなわち $\cos\theta\leq -a/b$ のときである。
- $r=a\sec\theta-b$ の場合。$\sec\theta<0$ ならばこれは負なので、点は存在しない。$\sec\theta>0$ ならば、$r\geq 0$ となるのはちょうど $\sec\theta\geq b/a$、すなわち $0<\cos\theta\leq a/b$ のときである。

$\alpha=\arccos(a/b)$ とおく。$0<a/b<1$ であるから、これは $(0,\frac{\pi}{2})$ に属する。

考えてみよう $\sec\theta<0$ の部分はどのような形をしているか？

それは $\cos\theta\leq -a/b$、すなわち $\pi-\alpha\leq|\theta|\leq\pi$ における $r=b+a\sec\theta$ である。端点では $\cos\theta=-a/b$ より $r=b-b=0$ となるので、この部分は原点から始まり原点で終わる。$\theta=\pi$ では $r=b-a$ となり、これは負の x 軸上の点 $(a-b,0)$ である。その間では $r>0$ であり、曲線は x 軸に関して対称であるから、この部分は原点の左側にある閉じたループであり、（$x=a+b\cos\theta$ であるから）$a-b\leq x\leq 0$ の範囲にある。

内側の枝 $r=a\sec\theta-b$（$\alpha\leq|\theta|<\frac{\pi}{2}$）も原点（$\cos\theta=a/b$ となるところ）から始まり、$|\theta|\to\frac{\pi}{2}$ のとき漸近線 L に向かって伸びていき、$0\leq x<a$ の範囲にとどまる。したがって内側の枝とループは合わせて、O で自分自身と交差する一本の曲線をなし、そこでの接線の方向は $\theta=\pm\alpha$ である。



（図は $a=1$、$b=2$ の場合であり、$\alpha=\frac{\pi}{3}$ である。外側の枝をティールで、内側の枝と

ループを合わせたものをプラムで示す。）

$a=1$、$b=2$ のときのループの面積。ここで $\cos\theta \le -\frac{1}{2}$ は $\frac{2\pi}{3} \le |\theta| \le \pi$ を意味し、ループ上では $r = 2+\sec\theta$ である。θ がこの範囲を動くとき、半直線はループをちょうど一度だけ掃くので、面積は $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ である。x 軸に関する対称性を用いて、上半分 $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \pi$ の2倍をとる：

$$\begin{aligned}\text{面積} &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi}(2+\sec\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \int_{2\pi/3}^{\pi}\left(4+4\sec\theta+\sec^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \Big[\,4\theta+4\ln|\sec\theta+\tan\theta|+\tan\theta\,\Big]_{2\pi/3}^{\pi}.\end{aligned}$$

与えられた $\sec\theta$ の原始関数（antiderivative）は、区間が $\frac{\pi}{2}$ を含まないので、ここでも有効である。$\theta=\pi$ では $\sec\theta=-1$、$\tan\theta=0$ であるから、括弧の値は $4\pi+4\ln 1+0=4\pi$ である。$\theta=\frac{2\pi}{3}$ では $\sec\theta=-2$、$\tan\theta=-\sqrt{3}$ であるから、括弧の値は $\frac{8\pi}{3}+4\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}$ である。差をとると、

$$\text{ループの面積} = \frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}-4\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

検算

- 数値的には、面積は $4.1888+1.7321-5.2678 \approx 0.6530$ である。これは当然のことながら正であり、ループが収まる長方形 $-1\le x\le 0$、$|y|\le 0.45$（その面積は0.9）と比べて小さい。$[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$ 上で $\frac{1}{2}(2+\sec\theta)^2$ を直接数値積分しても、やはり0.65301が得られる。
- ループは O と $(-1,0)$ を通る。$\theta=\frac{2\pi}{3}$ では $r=2-2=0$、$\theta=\pi$ では $r=2-1=1$ である。
- (i) の曲線上の点を一つ選ぶ。たとえば $a=2$、$b=1$、$\theta=\frac{\pi}{4}$ とすると $r=2\sqrt{2}+1$ であり、半直線は L と $(2,2)$ で交わる。この交点は O から距離 $2\sqrt{2}$ にあるので、曲線上の点はそこからさらに $1=b$ だけ先にある。

よくある間違い

- 条件 $r\ge 0$ を忘れる。この条件こそが (i) で $\sec\theta>0$ を導くものであり、(ii) でループの θ の範囲を定めるものである。
- ループの積分を、$\theta=\frac{2\pi}{3}$ で $r=0$ となるところから始めずに、漸近線の方向を通って $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ で行ってしまう。
- 第2象限での $\ln|\sec\theta+\tan\theta|$ の符号の誤り。第2象限では $\sec\theta$ と $\tan\theta$ はどちらも負である。

STEP のその先へ

コンコイドは紀元前 200 年ごろ、ニコメデスによって角の三等分（trisection of angles）と立方根を求めるために考案された。これらは定規とコンパスだけでは不可能な問題であり、その不可能性の証明は、代数学の最初の講義で学ぶ体論（field theory）から得られる（Allenby, *Rings, Fields and Groups* を参照）。(ii) の原点における自己交差は**結節点**（node）であり、代数曲線（algebraic curve）上の特異点（singular point）の一例である。ここでの代数曲線は 4 次曲線 $(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2$ である。STEP 形式の曲線の概形を描く問題をさらに多く知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。