解答例

STEP III 2015、第 2 問

純粋数学 • 解析学

> **STEP III 2015、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q2

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.1 節「**「いずれは」とは何を意味するか**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/eventually.html

鍵となる考え方

関係 $(s_n) \leq (t_n)$ は「最終的に（eventually）$s_n \leq t_n$ となる」ことを意味する。つまり、初めのほうの有限個の項は無視してよい。したがって、正しい主張を示すには、それより先では不等式が保証されるような点 m を明示する証明が必要であり、誤った主張を示すには、どのような m を選んでも破綻させる数列（sequence）の組が必要である。常に「**どの n から先で**これが成り立つのか」と問い続けること。

解答

小問 (i)

正しい。正の整数 n に対しては $n > 0$ で割ることができるので、

$$1000n \leq n^2 \iff 1000 \leq n.$$

よって $n \geq 1000$ ならば常に $1000n \leq n^2$ が成り立ち、$m = 1000$ とすればよい。（$1000 \cdot 999 > 999^2$ であるから、これより小さい m ではうまくいかない。）

小問 (ii)

誤りである。落とし穴は、「最終的に $s_n \leq t_n$ となるわけではない」ということからわかるのは、$s_n > t_n$ となる n が**無限に多く**存在することだけであり、**最終的に**そうなる

ことではない、という点である。2つの数列は互いに何度も追い越し合うことができる。そこで

$$s_n = 2 + (-1)^n, \qquad t_n = 2,$$

とおく。すると s_n は $1,3,1,3,\ldots$ と続き、どちらの数列もすべての項が正である。

- $(s_n) \leq (t_n)$ は成り立たない。どのような正の整数 m を提示されても、偶数 $n \geq m$ が存在し、その n に対して $s_n = 3 > 2 = t_n$ となるからである。
- $(t_n) \leq (s_n)$ も成り立たない。どのような m を提示されても、奇数 $n \geq m$ が存在し、その n に対して $t_n = 2 > 1 = s_n$ となるからである。

よって、この主張の仮定は成り立つが、結論は成り立たない。

小問 (iii)

正しい。仮定より、すべての $n \geq m_1$ に対して $s_n \leq t_n$ となる正の整数 m_1 が存在し、すべての $n \geq m_2$ に対して $t_n \leq u_n$ となる正の整数 m_2 が存在する。

$$m = \max(m_1, m_2).$$

とおく。$n \geq m$ ならば $n \geq m_1$ かつ $n \geq m_2$ であるから、n において両方の不等式が成り立ち、

$$s_n \leq t_n \leq u_n.$$

を得る。よって $n \geq m$ ならば常に $s_n \leq u_n$ であり、これは $(s_n) \leq (u_n)$ にほかならない。

考えてみよう なぜ単に $m = m_1$ や $m = m_1 + m_2$ としないのか？

$m = m_1$ とするとうまくいかない。$m_1 \leq n < m_2$ の範囲では、t_n と u_n の大小について何もわからないからである。n が**両方の**境目を同時に越えている必要があり、$\max(m_1, m_2)$ はそれを保証する最小の選び方である。（$m_1 + m_2$ でもうまくいくが、無駄が多い。）

小問 (iv)

正しい。$m = 4$ **とすればよい**。短い表を作ると、どこから始めればよいかがわかる。

n	1	2	3	4	5	6
n^2	1	4	9	16	25	36
2^n	2	4	8	16	32	64

不等式は $n = 1, 2$ で成り立ち、$n = 3$ で成り立たず、$n = 4$ から再び成り立つ。よって $m = 4$ が最小の選び方であり、すべての $n \geq 4$ に対して $n^2 \leq 2^n$ が成り立つことを数学的帰納法（induction）で証明する。

基底段階（*base case*）。$n = 4$ のとき、$n^2 = 16 = 2^4$ である。

帰納段階（*inductive step*）。$n \geq 4$ かつ $n^2 \leq 2^n$ と仮定する。$n \geq 3$ であるから $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 2 > 0$ となり、$2n + 1 < n^2$ である。したがって

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &< n^2 + n^2 && \text{なぜなら} 2n + 1 < n^2 \\ &= 2n^2 \\ &\leq 2 \cdot 2^n && \text{帰納法の仮定より} \\ &= 2^{n+1}.\end{aligned}$$

よって n での結果から $n+1$ での結果が導かれ、数学的帰納法により、すべての $n \geq 4$ に対して $n^2 \leq 2^n$ が成り立つ。ゆえに $m = 4$ として $(n^2) \leq (2^n)$ である。

考えてみよう 帰納法のどこで、n が大きいことが本当に必要だったのか？

$2n + 1 < n^2$ という段階だけであり、そこでは $n \geq 3$ が必要である。これが、帰納法を $n = 1$ から始められない理由である。$n = 2$ から $n = 3$ への段階では $5 < 4$ を用いることになるが、これは誤りであり、実際 $3^2 > 2^3$ となっている。

検算

- 小問 (i)：$n = 1000$ では両辺とも 10^6 に等しい。$n = 999$ では $999\,000 > 998\,001$ である。
- 小問 (iv)：4 から 2000 までのすべての n についてコンピュータで $n^2 \leq 2^n$ を確かめると成り立つことが確認でき、上の表から $n = 3$ で成り立たないことも確認できる。2^n がどれほど速く勝つかを実感するには、$20^2 = 400$ だが $2^{20} = 1\,048\,576$ であることを見るとよい。
- 小問 (ii)：どの m を試しても、一方の順序に対しては次の偶数 n によって、もう一方の順序に対しては次の奇数 n によって破られる。

よくある間違い

- 「最終的に $\leq$ とはならない」を「最終的に $>$ となる」と取り違えること。「ある m が存在して、すべての $n \geq m$ に対して…」の否定（negation）は、「すべての m に

対して、$s_n > t_n$ となる $n \geq m$ が存在する」である。

- (iv) の帰納法を $n = 1$ や $n = 2$ から始めること。そこでは帰納段階が実際に成り立たない。
- (iii) で、2つの境目が一致しなければならないかのように、両方の仮定に同じ文字 m を使うこと。

STEP のその先へ

ここでの関係は、実解析（real analysis）全体を貫く「最終的に」という量化子（quantifier）である。数列が収束（converge）するとは、どのような許容誤差に対しても、数列が**最終的に**極限からその許容誤差以内に収まることである。小問 (ii) は、実数の順序とは異なり、この数列の順序が全順序（total order）ではないこと、すなわち2つの数列が比較可能であるとは限らないことを示している。計算機科学者は同じ考え方をビッグオー記法（big-O notation）に用いており、そこでは (iv) は、指数関数（exponential）が最終的には多項式（polynomial）に勝つというよく知られた事実である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、こうした量化子を用いた議論が体系化される様子を見るのに親しみやすい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。