解答例

STEP III 2015、第 11 問

力学 ・ 円運動

> **STEP III 2015、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q11

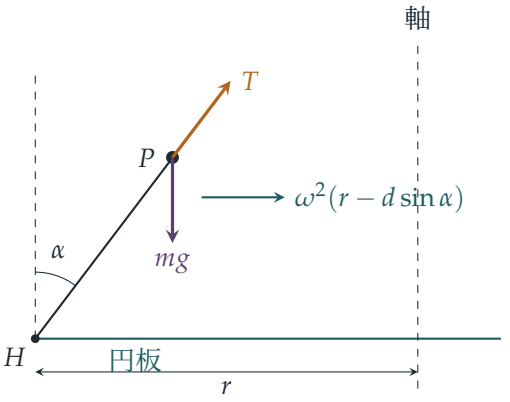
鍵となる考え方

軽い棒（light rod）は質量をもたないので、運動していても、棒にはたらく力とモーメント（moment）は正確につり合っていなければならない。小問 (i) では棒にはたらく力は 2 つだけであり、ちょうつがい（hinge）からの力はちょうつがいのまわりにモーメントをもたないので、P からの力はちょうつがいへまっすぐ向かっていなければならない。そうすれば、P は水平な円周上を運動する質点（particle）であり、あとは力の分解（resolving）で片がつく。小問 (ii) では 2 つの質点からの力が棒に沿っている必要はないが、ちょうつがいのまわりのモーメントを考えると、やはり β についての方程式が 1 つ得られる。

解答

モデル化。質点は大きさをもたない点とし、棒は軽くて変形しないものとし、ちょうつがいはなめらかであるとする。したがって、ちょうつがいは自身の軸（ちょうつがいを通り、棒を含む鉛直面に垂直な水平直線）のまわりに偶力（couple）を及ぼさない。この平面内に座標軸をとり、原点をちょうつがい H、x 軸を回転軸の方へ向かう水平方向、y 軸を鉛直上向きとする。H から距離 s にある棒上の点は $(s\sin\theta,\ s\cos\theta)$ にある。ここで θ は棒が鉛直上向きとなす角であり、この点の回転軸からの水平距離は $r - s\sin\theta$ である。

小問 (i)



上の図には P にはたらく力を描いてある。重力と、棒からの力である。棒からの力が棒に沿ってはたらくことは、これから示す。青緑の矢印は P の加速度である。

P からの力は棒に沿っている。棒にはたらく力は 2 つだけである。H にはたらくちょうつがいからの力と、P にはたらく P からの力 $\mathbf{G}$ である。棒は軽いので、その運動がどのようなものであっても、ちょうつがいの軸のまわりで棒にはたらくモーメントの和は零である（質量と角加速度（angular acceleration）の積が零であるため）。ちょうつがいからの力は H のまわりにモーメントをもたないので、$\mathbf{G}$ もモーメントをもたない。

次に、P は回転軸を中心とする水平な円周上を運動するので、その加速度は水平で、回転軸の方を向いている。回転軸は棒を含む鉛直面内にある。重力もこの平面内にあるので、棒から P にはたらく力も、したがって（ニュートンの第三法則（Newton's third law）により、それと大きさが等しく向きが反対の）$\mathbf{G}$ も、この平面内にある。平面内の力で H のまわりのモーメントが零であるものは、その作用線（line of action）が H を通る。この作用線は棒上にある P も通るので、$\mathbf{G}$ は棒に平行である。これで示された。

角度。よって棒は、棒に沿った大きさ T の力で P を押すか引くかしている。この力の向きを H から P へ向かう向きにとる。すなわち成分は $(T\sin\alpha,\ T\cos\alpha)$ である。P の回転軸からの距離は $r - d\sin\alpha$ であり、$d\sin\alpha < r$ よりこれは正である。したがって P は回転軸に関して H と同じ側にあり、その加速度 $\omega^2(r - d\sin\alpha)$ は $+x$ 方向を向く。P についての運動方程式（ニュートンの第二法則）は

$$\begin{aligned} &\text{鉛直方向：} \quad T\cos\alpha - mg = 0, \\ &\text{水平方向：} \quad T\sin\alpha = m\omega^2(r - d\sin\alpha). \end{aligned}$$

第 2 式を第 1 式で割ると（$\cos\alpha \neq 0$ である。そうでなければ $T\cos\alpha = 0 \neq mg$ となっ

てしまう)、

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2(r - d\sin\alpha)}{g} = \frac{r - d\sin\alpha}{a}.$$

両辺に $a\cot\alpha$ を掛けると $a = r\cot\alpha - d\cos\alpha$、すなわち

$$r\cot\alpha = a + d\cos\alpha,$$

となり、示すべき式が得られた。

ちょうつがいからの力。第 1 式から $T = mg/\cos\alpha > 0$ であるので、棒は P をちょうつがいから遠ざかる向きに押している。つまり棒は圧縮（compression）を受けている。ニュートンの第三法則により、P は棒に沿って H の方へ、大きさ T の力で棒を押す。棒は軽いので棒にはたらく力の和は零であり、ちょうつがいが棒に及ぼす力はこれと大きさが等しく向きが反対である。すなわちその力は**棒に沿って、ちょうつがいから P の方へ向かう向き**（上向きで、回転軸の方へ向かう向き）にはたらき、その大きさは

$$\frac{mg}{\cos\alpha} = mg\sec\alpha.$$

である。

小問 (ii)

今度は質量 m_i $(i = 1, 2)$ の質点が $(d_i\sin\beta,\ d_i\cos\beta)$ にあり、回転軸からの距離は $r - d_i\sin\beta > 0$ である。

> **考えてみよう** 各質点は、向きのわからない力で棒を引いている。これらの力を個別に求めずに済ませるにはどうすればよいか。

個別に求める必要はない。各質点についての運動方程式から、棒がその質点に及ぼす力がわかり、軽い棒についての H のまわりのモーメントの式を使えば、未知のちょうつがいからの力は消える。棒から質点 i にはたらく力を $\mathbf{F}_i$ とする。質点の加速度は $+x$ 方向に $\omega^2(r - d_i\sin\beta)$ であるから、

$$\mathbf{F}_i + (0, -m_ig) = (m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta),\ 0) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{F}_i = (m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta),\ m_ig).$$

ニュートンの第三法則により、質点 i は点 $(x_i, y_i) = (d_i\sin\beta,\ d_i\cos\beta)$ において棒に力 $-\mathbf{F}_i$ を及ぼす。点 (x, y) にはたらく力 (X, Y) の H のまわりの反時計回りのモーメントは $xY - yX$ であるから、$-\mathbf{F}_i$ のモーメントは

$$-d_i\sin\beta\cdot m_ig + d_i\cos\beta\cdot m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta).$$

である。ちょうつがいからの力は H のまわりにモーメントをもたず、棒は軽いので、これら 2 つのモーメントの和は零である。$\omega^2\sin\beta$ で割り（これは零ではない。もし

$\beta = 0$ ならモーメントの式は $\sum m_i d_i \omega^2 r = 0$ となり、これは成り立たない)、$g/\omega^2 = a$ を用いると

$$\sum_{i=1}^{2} m_i d_i (-a + r\cot\beta - d_i \cos\beta) = 0,$$

すなわち

$$(m_1 d_1 + m_2 d_2)\, r\cot\beta = (m_1 d_1 + m_2 d_2)\, a + (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)\cos\beta.$$

$m_1 d_1 + m_2 d_2 > 0$ で割ると、

$$r\cot\beta = a + b\cos\beta, \qquad b = \frac{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2}{m_1 d_1 + m_2 d_2}.$$

検算

- 質点が 1 つの場合（たとえば $m_2 = 0$)、$b = d_1$ となり、小問 (i) の結果に戻る。また $d_1 = d_2 = d$ ならやはり $b = d$ であり、同じ点にある 2 つの質点は 1 つの質点のようにふるまう。
- b は d_1 と d_2 の（重み $m_i d_i$ による）加重平均（weighted average）であるから、両者の間にある。当然そうあるべきである。
- $\omega \to 0$ のとき $a \to \infty$ であるから $\cot\alpha \to \infty$ となり、棒は鉛直に近づく。円板がほとんど回っていないときに予想されるとおりである。$d > r$ のもとで $\omega \to \infty$ とすると $a \to 0$ であり、方程式は $r = d\sin\alpha$ に近づく。質点は回転軸に近づき、そこでは向心力（centripetal force）がほとんど必要ない。
- $r = 1\,\mathrm{m}$、$\omega = 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$、$d = 0.6\,\mathrm{m}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とすると $a = 0.3924\,\mathrm{m}$ であり、方程式から $\alpha \approx 0.9251$（約 53.0°）が得られる。このとき $r\cot\alpha \approx 0.7538 \approx a + d\cos\alpha$ である。この角度で静止した状態から棒の運動をコンピュータでシミュレーションすると、棒はその角度にとどまる。

よくある間違い

- 小問 (ii) で、各質点が棒に及ぼす力が棒に沿っていると仮定してしまう。それは質点が 1 つの場合に特有のことであり、2 つの場合には H のまわりのモーメントの和が零であることしかいえない。
- 質点の描く円の半径として、$r - d\sin\alpha$ ではなく r（あるいは $d\sin\alpha$）を使ってしまう。
- ちょうつがいからの力をちょうつがいへ向かう向きと答えてしまう。棒は圧縮を受けているので、ちょうつがいは棒を P の方へ押している。

STEP のその先へ

小問 (ii) のモーメントの式は、有効ポテンシャル（effective potential）$\sum m_i\left(gd_i\cos\theta - \frac{1}{2}\omega^2(r - d_i\sin\theta)^2\right)$ が停留するという条件である。回転座標系（rotating frame）では、遠心力（centrifugal force）が付加的なポテンシャルのようにふるまうのである。これは、遠心調速機（centrifugal governor）のような回転する系を解析したり、定常状態が安定（stable）かどうかを問うたりする際の出発点となる。ここでは有効ポテンシャルは $\theta = \alpha$ で極大となるので、小問 (i) の定常状態は実は不安定である。棒を少しつつくと、棒は離れていくように振れてしまう。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体（rigid body）のモーメントと回転座標系を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。