解答例

STEP III 2015、第 10 問

力学 ・ 回転する剛体棒

STEP III 2015、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

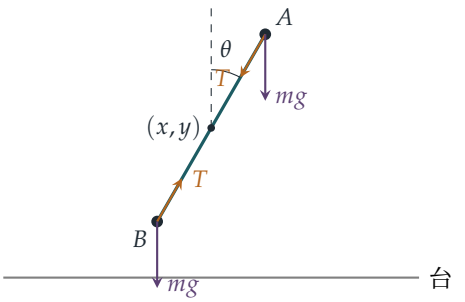
step.maths.org/questions/15-s3-q10

鍵となる考え方

系の運動を、中点の運動と棒の回転によって記述する。各質点の位置を x、y、θ で表し、2 回微分して、それぞれの質点にニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）を適用する。2 つの方程式を足し合わせると張力（tension）が消え、重心（centre of mass）の運動が得られる。引き算をして棒に垂直な方向に分解すると再び張力が消え、回転の様子が残る。3 つの加速度がすべてわかれば、最後の小問は放物運動（projectile motion）と一定の回転の組み合わせにすぎない。

解答

2 つの質量を、軽い剛体の棒でつながれた質点としてモデル化する。各質点にはたらく力は重力と棒からの力だけであり、棒からの力は棒に沿った向きにはたらく。張力を T とおく。$T > 0$ のとき、棒は各質点を中点の方へ引く。（棒は押すこともでき、そのときは $T < 0$ となる。以下の議論は符号によらない。）



質点 A の運動方程式

はじめに中点より上にある棒の端の質点を A とする。このとき中点から A へのベクトルは $a(\sin\theta, \cos\theta)$ である。よって A の位置は

$$\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} x + a\sin\theta \\ y + a\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \text{よって} \qquad \dot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} - a\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

となる。ここで連鎖律（chain rule）を用いた。これが求める速度である。$\dot{\theta}\cos\theta$ と $\dot{\theta}\sin\theta$ に積の微分法則（product rule）を用いてもう一度微分すると、

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

棒は A を中点の方へ、すなわち $-(\sin\theta, \cos\theta)$ の向きに、大きさ T の力で引く。重力の寄与は $-mg(0,1)$ である。したがって A に対するニュートンの第 2 法則から、問題文の方程式がそのまま得られる。

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} = -T\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A}$$

もう一方の質点

反対側の端にある B については、すべての a を $-a$ に置き換えればよい。棒は今度は B を $+(\sin\theta, \cos\theta)$ の向きに引く。

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} - a\ddot{\theta}\cos\theta + a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} + a\ddot{\theta}\sin\theta + a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{B}$$

ここで B の速度は $(\dot{x} - a\dot{\theta}\cos\theta,\ \dot{y} + a\dot{\theta}\sin\theta)$ である。

加速度を導く

(A) と (B) を足すと、a または T を含む項はすべて打ち消し合う。

$$2m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -2mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{よって} \qquad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

(A) から (B) を引いて 2 で割ると、

$$ma\ddot{\theta}\cos\theta - ma\dot{\theta}^2\sin\theta = -T\sin\theta,$$
$$-ma\ddot{\theta}\sin\theta - ma\dot{\theta}^2\cos\theta = -T\cos\theta.$$

考えてみよう 未知の T をどうやって消去すればよいだろうか？

張力は棒に沿ってはたらくので、棒に垂直な方向、すなわち $(\cos\theta, -\sin\theta)$ の向きに分解する。つまり、1 つ目の方程式の $\cos\theta$ 倍から 2 つ目の方程式の $\sin\theta$ 倍を引く。右辺は $-T\sin\theta\cos\theta + T\cos\theta\sin\theta = 0$ となり、$\dot{\theta}^2$ の項も同様に打ち消し合う。残るのは

$$ma\ddot{\theta}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0,$$

であり、$m, a \neq 0$ であるから $\ddot{\theta} = 0$ が得られる。（代わりに棒に沿った方向に分解すると $T = ma\dot{\theta}^2$ が得られる。これは中点のまわりの円運動に必要な張力である。）

最後の小問

$t = 0$ において棒は鉛直なので $\theta = 0$ である。このとき質点 A が上側にあり、その速度は $(\dot{x} + a\dot{\theta},\ \dot{y})$、$B$ が下側にあり、その速度は $(\dot{x} - a\dot{\theta},\ \dot{y})$ である。これらを与えられた初速度と比較すると、

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = u, \qquad \dot{x} - a\dot{\theta} = 0, \qquad \dot{y} = v,$$

したがって初期状態で $\dot{x} = \frac{1}{2}u$、$\dot{\theta} = \dfrac{u}{2a}$、$\dot{y} = v$ である。

前の小問より $\dot{\theta}$ は一定に保たれるので、$\theta = \dfrac{ut}{2a}$ である。θ が増加するように $u > 0$ とする。また $\ddot{y} = -g$ かつ $y(0) = h$ であるから、

$$y = h + vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

棒が $\frac{1}{2}\pi$ だけ回転するのは $\dfrac{ut}{2a} = \dfrac{\pi}{2}$、すなわち $t = \dfrac{\pi a}{u}$ のときである。このとき棒は水平なので、2 つの質点はともに中点と同じ高さ y にある。2 つの質点がその瞬間にそろって台に達するのは、そのときちょうど $y = 0$ となる場合である。

$$h + v\cdot\frac{\pi a}{u} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{\pi^2a^2}{u^2} = 0.$$

両辺に $2u^2$ を掛けて整理すると

$$2hu^2 = \pi^2a^2g - 2\pi uva,$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $v = 0$ のとき落下時間は $\sqrt{2h/g}$ であり、これが $\pi a/u$ に等しくなければならない。両辺を 2 乗すると $2hu^2 = \pi^2a^2g$ となり、結果と一致する。

- 単位：結果の各項の次元はすべて $\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$ である。
- 剛体の棒でつながれた 2 つの質点の運動を、$g = 9.8$ とし、a、u、v をいくつかランダムに選び、h を公式で定めてコンピュータでシミュレーションした。たとえば $a \approx 1.754$ のとき $h \approx 17.93$ となる。どの場合も、2 つの質点は $t = \pi a/u$ において誤差 10^{-10} 以内でそろって台に達し、そのとき棒は水平であった。

よくある間違い

- 一方の質点について張力の向きを誤る。棒は各質点を中点の方へ引くので、2 つの力は大きさが等しく向きが反対である。
- 2 つの方程式で異なる T の値を用いる。棒は軽いので、棒にはたらく合力は 0 でなければならず、張力は両端で等しい。
- $\dot{\theta}\cos\theta$ を微分するときに $-a\dot{\theta}^2$ の項を落とす。この項がないと、引き算の段階がきれいにまとまらない。

STEP のその先へ

この問題は、質点系に関する一般的な定理の小さな一例である。重心は、すべての質量とすべての外力（external force）がそこに集中しているかのように運動する。内力（internal forces）は対ごとに打ち消し合うので、重心のまわりに外力によるトルク（torque）がなければ、重心のまわりの角運動量（angular momentum）は保存される。大学 1 年の力学では、x、y、θ を一般化座標（generalised coordinates）とし、T をまったく必要としないラグランジュ形式（Lagrangian approach）にも出会うだろう。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、重心と剛体（rigid body）の回転を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。