解答例

STEP III 2015、第 1 問

純粋数学 • 積分の漸化式と置換

> **STEP III 2015、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q1

鍵となる考え方

小問 (i) では、$I_n - I_{n+1}$ をまとめると分子に u^2 をもつ一つの積分になる。u^2 を $u \cdot u$ と書いて部分積分（integration by parts）を行うと、I_n に戻ってくる。小問 (ii) では、式 $(x - x^{-1})^2$ は x を $1/x$ に置き換えても変わらず、この置換（substitution）によって因子 x^{-2} が現れる。二つの形の平均をとると $1 + x^{-2}$ が得られ、これはちょうど $x - x^{-1}$ の導関数（derivative）であるから、置換 $u = x - x^{-1}$ がうまくいく。小問 (iii) は、分母を $x - x^{-1}$ を用いて書き直せば、姿を変えた小問 (ii) にほかならない。

解答

小問 (i)

二つの被積分関数を通分してまとめると、

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^\infty \frac{(1+u^2)-1}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty u \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

二つ目の因子は原始関数（antiderivative）が容易に求まる：

$$\int \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2n(1+u^2)^n}.$$

そこで、u を微分し $u/(1+u^2)^{n+1}$ を積分する形で部分積分を行う：

$$I_n - I_{n+1} = \left[-\frac{u}{2n(1+u^2)^n}\right]_0^\infty + \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u.$$

境界項（boundary term）は $u = 0$ において 0 である。また $u \to \infty$ のときも 0 に収束する。なぜなら $n \geq 1$ より $0 \leq u/(1+u^2)^n \leq u/(1+u^2) < 1/u$ となるからである。

したがって

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n} I_n,$$

となり、示すべき式が得られた。整理すると

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n \qquad (n \geq 1).$$

初期値は $I_1 = [\arctan u]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$ である。この漸化式（recurrence）を繰り返し用いると

$$I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

考えてみよう 奇数の積を階乗に直すにはどうすればよいか。

分子と分母に偶数の積 $2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n n!$ を掛ける。すると分子は $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n) = (2n)!$ となり、分母は $(2^n n!)^2$ となる。よって

$$I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2},$$

となり、示すべき式が得られた。（厳密な証明には数学的帰納法（induction）を用いる。$n = 0$ のとき公式は $I_1 = \frac{\pi}{2}$ を与えるので成り立つ。I_n について成り立つと仮定すると、$\frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n-1)(2n)}{(2n)^2}$ を掛けることで $\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$ は $\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$ に変わる。）

小問 (ii)

第一の等式。 J において $x = 1/t$ と置換すると $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$ であり、x が 0 から ∞ まで動くことは t が ∞ から 0 まで動くことに対応する。また

$$\left(x - x^{-1}\right)^2 = \left(t^{-1} - t\right)^2 = \left(t - t^{-1}\right)^2,$$

である。2 乗すれば符号の反転が消えるからである。したがって

$$J = \int_\infty^0 \mathrm{f}((t - t^{-1})^2)\left(-t^{-2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{-2}\,\mathrm{f}((t - t^{-1})^2)\,\mathrm{d}t,$$

となり、ダミー変数（dummy variable）t を x と書き直せば第一の形が得られる。

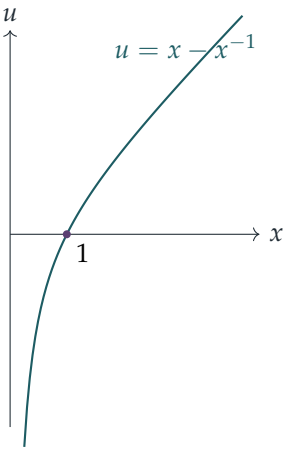
第二の等式。 J のもとの式とこの式を足して 2 で割ると

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(1 + x^{-2}\right)\mathrm{f}((x - x^{-1})^2)\,\mathrm{d}x.$$

第三の等式。 ここで $u = x - x^{-1}$ とおくと $\mathrm{d}u = (1 + x^{-2})\,\mathrm{d}x$ である。$\mathrm{d}u/\mathrm{d}x > 0$ であるから、u は x について狭義単調増加し、$-\infty$（$x \to 0^+$ のとき）から $+\infty$（$x \to \infty$ のとき）まで動く。よってこの置換は全範囲にわたる一対一の変数変換である：

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{f}(u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \mathrm{f}(u^2)\,\mathrm{d}u.$$

最後の等式が成り立つのは、$\mathrm{f}(u^2)$ が u の偶関数（even function）であり、$(-\infty, 0)$ 上の積分と $(0, \infty)$ 上の積分が等しいからである。以上で小問 (ii) が示された。



この曲線は点 $(1, 0)$ を通り、$x > 0$ の範囲で単調に増加して、u のすべての実数値をちょうど一度ずつとる。

小問 (iii)

目標は、被積分関数を $x^{-2}\,\mathrm{f}((x - x^{-1})^2)$ の形に書き直すことである。$(x - x^{-1})^2 = x^2 - 2 + x^{-2}$ であるから

$$x^4 - x^2 + 1 = x^2\left(x^2 - 1 + x^{-2}\right) = x^2\left(1 + (x - x^{-1})^2\right).$$

したがって

$$\frac{x^{2n-2}}{(x^4 - x^2 + 1)^n} = \frac{x^{2n-2}}{x^{2n}(1 + (x - x^{-1})^2)^n} = x^{-2}\,\mathrm{f}((x - x^{-1})^2), \qquad \text{ただし} \mathrm{f}(y) = \frac{1}{(1 + y)^n}.$$

小問 (ii) における J の第一の形と最後の形により

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(x^4 - x^2 + 1)^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{(1 + u^2)^n}\,\mathrm{d}u = I_n.$$

小問 (i) の公式で n を $n - 1$ に置き換える（$n - 1 \geq 0$、すなわちすべての正の整数 n に対して有効）と

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(x^4 - x^2 + 1)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{(2n - 2)!\,\pi}{2^{2n-1}((n - 1)!)^2}.$$

検算

- $n = 1$ のとき答えは $\frac{\pi}{2}$ であり、$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$ となる。$n = 2$ のときは $\frac{\pi}{4}$、$n = 3$ のときは $\frac{3\pi}{16} \approx 0.5890$ である。もとの積分を数値積分すると、これらすべての値と一致し、$n = 8$ までの場合とも一致する。
- 漸化式による $I_2 = \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{4}$ は、$u = \tan\theta$ による直接計算 $I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$ と一致する。
- 小問 (ii) で $\mathrm{f}(y) = \mathrm{e}^{-y}$ とすると $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x - 1/x)^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.88623$ となる。四つの形すべてを数値計算すると、この値が得られる。

よくある間違い

- 境界項 $u/(1 + u^2)^n$ が無限遠で消えることの確認を忘れる。ここでは確かに消えるが、それは $n \geq 1$ だからこそである。
- $u = x - x^{-1}$ と置換したのに、積分範囲を 0 と ∞ のままにしてしまう。新しい下端は $-\infty$ であり、範囲を $(0, \infty)$ に戻せるのは $\mathrm{f}(u^2)$ が偶関数だからである。
- 添字をずらさずに I_{n+1} の公式を使ってしまう。小問 (iii) の答えは I_n であって、I_{n+1} ではない。

STEP のその先へ

比 $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \binom{2n}{n}/4^n$ は中心二項確率（central binomial probability）であり、小問 (i) の漸化式は π に関するウォリス（Wallis）の積を導くものと同じである。小問 (ii) の技法はコーシー・シュレーミルヒ変換（Cauchy–Schlömilch transformation）として知られている。これを用いると、検算で扱ったものと同様のガウス型積分（Gaussian-type integral）をはじめ、初等的な原始関数をもたない多くの定積分を計算できる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、うまく選んだ置換で解ける積分がさらに載っており、Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis* は、広義積分（improper integral）と変数変換を厳密に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。