解答例

STEP II 2015、第 9 問

力学 ・ 剛体の回転

> **STEP II 2015、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q9

鍵となる考え方

この系のすべては、ただ一つの点、すなわち 2 つの粒子の重心（centre of mass）G によって支配されている。A を支点とする剛体（rigid body）は、G が A の真下にある状態で静止してつり合い、G を最高点の上まで運べるだけのエネルギーをもつときに限って完全な回転をする。したがって、G がどこにあり、A からどれだけ離れているかを求めれば、どちらの小問もすぐに解ける。

解答

B と C を軽い剛体の棒でつながれた粒子とみなし、A にはなめらかな軸があるとする。したがって、仕事をする力は重力だけである。

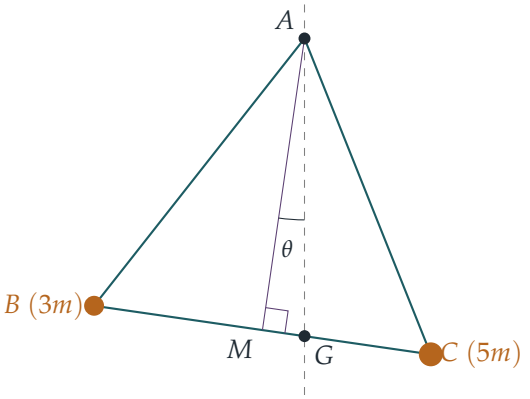
小問 (i)

棒は軽いので、系の重心は、B にある質量 $3m$ と C にある質量 $5m$ の重心である。その点 G は BC 上にあり、

$$BG = \frac{5}{8}a, \qquad CG = \frac{3}{8}a.$$

である。BC の中点を M とする。すると $MG = \frac{5}{8}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{8}a$ であり、これは C の側である。三角形は正三角形なので $AM \perp BC$ かつ $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ であるから、三角形 AMG にピタゴラス（Pythagoras）の定理を用いると、

$$AG^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{64} = \frac{49a^2}{64}, \qquad AG = \frac{7a}{8}.$$



つり合い（equilibrium）の状態では、G にはたらく重力 $8mg$ の A のまわりのモーメント（moment）はゼロでなければならないので、G は A の真下にある。すなわち、直線 AG は鉛直である。さて、BC は AM に垂直であり、水平方向は鉛直な AG に垂直である。2 本の直線をともに直角だけ回転させても、それらのなす角は変わらないので、

$$\theta = \angle GAM.$$

である。直角三角形 AMG（M が直角）において、

$$\sin\theta = \frac{MG}{AG} = \frac{a/8}{7a/8} = \frac{1}{7},$$

となり、題意が示された。なお、重いほうの粒子 C が BC の下側の端にあることに注意しよう。これは当然そうあるべき結果である。

小問 (ii)

2 つの粒子はどちらも軸から距離 a のところにあるので、つねに同じ速さをもつ。三角形が角速度（angular speed）ω で回転するとき、各粒子の速さは $a\omega$ である。撃力（impulse）を受けた直後、B の速さは v であるから C の速さも同じであり、運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\tfrac{1}{2}(3m)v^2 + \tfrac{1}{2}(5m)v^2 = 4mv^2.$$

となる。（同じことだが、A のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は $8ma^2$ であり、$\omega = v/a$ である。）撃力の向きは関係ない。以下のエネルギーの式には速さしか現れないからである。

? **考えてみよう** 糸につながれた粒子の場合のように、最高点で何かがたるまないように v を十分大きくする必要があるだろうか？

その必要はない。棒は剛体であり、引くだけでなく押すこともできるので、必要な条件は、系が一回りする前に角速度がゼロにならないことだけである。これは純粋にエネルギーだけで決まる条件である。

系の位置エネルギー（potential energy）は、$8mg$ と G の高さの積である。G は A を中心とする半径 $AG = \frac{7}{8}a$ の円周上を動くので、位置エネルギーは G が A の真上にあるときに最大となる。その位置は最初の位置より

$$2 \cdot \frac{7a}{8} = \frac{7a}{4}$$

だけ高い。エネルギー保存則（conservation of energy）より、G が h だけ上昇した位置では

$$4m(a\omega)^2 = 4mv^2 - 8mgh.$$

が成り立つ。右辺は $h = \frac{7}{4}a$ のとき最小となる。そこで右辺が正ならば、運動の間つねに $\omega \neq 0$ であるから、ω の符号は変わらず、系は同じ向きに回り続け、何回も回転を繰り返す。右辺が負ならば、G が最高点に達する前に ω はゼロにならなければならず、系は振り戻される。したがって条件は

$$4mv^2 > 8mg \cdot \frac{7a}{4} \iff v^2 > \frac{7ag}{2}.$$

である。よって

$$v_0 = \sqrt{\frac{7ag}{2}}.$$

（ちょうど $v = v_0$ のときは、G は A の真上の位置にじわじわと近づき、そこに達するには無限の時間がかかる。条件が狭義の不等式（strict inequality）になっているのはこのためである。）

検算

- 質量が等しければ G は M に一致し、$\theta = 0$、$AG = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ となる。$MG = 0$ とおいた式はまさにその結果を与える。
- すべての向きについて位置エネルギーを数値的に最小化すると、$\sin\theta = 0.142857\ldots = \frac{1}{7}$ が得られる。
- 単位：ag の単位は $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$ なので、v_0 は速さを表す。$a = 1\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ のとき、$v_0 \approx 5.86\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ である。
- 運動を 1 ステップずつ計算するコンピュータ・シミュレーションにより、$v = 1.01v_0$ のときは系が最高点を越え、$v = 0.99v_0$ のときは振り戻されることが確かめられる。

よくある間違い

- （AG の代わりに AM を用いて）G の上昇量を $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$ としてしまう。この場合 $v_0^2 = 2\sqrt{3}ag$ となる。
- B と C を別々に扱い、撃力によって C も速さ v を得ることを忘れる。
- 最高点で「糸がたるまない」という条件を課してしまう。棒は押す力（thrust）をはたらかせることができるので、そのような条件は必要ない。

STEP のその先へ

ここでのエネルギーによる議論は、実体振り子（compound pendulum）の剛体版である。重心から距離 d の点を支点とする物体は単振り子のようにふるまい、その運動方程式は $I\ddot{\psi} = -Mgd\sin\psi$ となる。大学 1 年次の講義では、この方程式の相平面（phase plane）を学ぶ。そこでは臨界速度 v_0 が、振動と完全な回転とを分けるセパラトリクス（separatrix）に対応する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、固定軸のまわりの剛体の回転と物理振り子を詳しく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。