解答例

STEP II 2015、第 8 問

純粋数学 • ベクトルと接する円

> **STEP II 2015、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q8

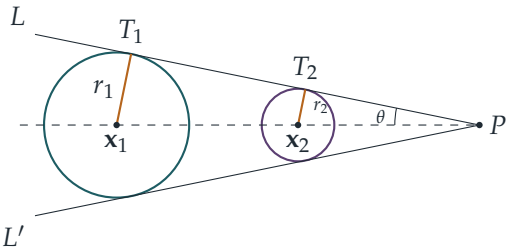
鍵となる考え方

それぞれの中心は 2 本の接線（tangent）のどちらからも同じ距離（その円の半径）にあるので、2 つの中心はどちらも L と L' のなす角の二等分線（angle bisector）上にある。この直線上では P からの距離が半径に比例するので、(i) の式がただちに得られる。(ii) では、この式を $r_1 r_2$ で割ると対称性がはるかに高まる。$\mathbf{x}_i / r_i$ と $1/r_i$ を用いて表すと、3 つの焦点（focus）は係数の和が零になる 1 つの線形関係式を満たし、これこそが一直線上にある（collinear）ということの意味なのである。

解答

小問 (i)

θ を、P において L と L' がなす角のうち円を含む側の角の半分とする。



円の接線は、中心からの垂直距離が半径に等しい。よって $\mathbf{x}_1$ は L からも L' からも距離 r_1 のところにあり、交わる 2 直線から等距離にある点は P における 2 本の角の二等分線のいずれかの上にある。2 つの円はどちらも L に関して同じ側にあり、かつ L' に

関して同じ側にあるので、2 つの中心は L と L' によって分けられる 4 つの角領域のうち同じ 1 つの中にある。したがって、2 つの中心は P から出る**同じ**半直線、すなわちその領域の二等分線上にある。この半直線に沿った単位ベクトルで、P から円の方へ向かうものを $\mathbf{u}$ とする。

L が C_1 に接する点を T_1 とすると、三角形 PT_1X_1（X_1 は中心）は T_1 で直角をなすので、$r_1 = PX_1 \sin\theta$ である。同様に $r_2 = PX_2 \sin\theta$ である。ゆえに

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{p} = \frac{r_1}{\sin\theta}\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}_2 - \mathbf{p} = \frac{r_2}{\sin\theta}\,\mathbf{u},$$

となる。ここで $\mathbf{p}$ は P の位置ベクトルである。$\mathbf{u}/\sin\theta$ を消去すると、

$$r_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{p}) = r_1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}) \quad \Longrightarrow \quad (r_1 - r_2)\,\mathbf{p} = r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1.$$

2 つの円は大きさが異なるので $r_1 \neq r_2$ であり、両辺を割ることができる：

$$\mathbf{p} = \frac{r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1}{r_1 - r_2},$$

これが示すべき式である。（半径が等しければ L と L' は平行になり、焦点はそもそも存在しない。）

小問 (ii)

> **考えてみよう** $\mathbf{p}$ の式は、見てすぐわかるような対称性をもっていない。3 つの焦点が同じ形に見えるように書き直せないだろうか？

$(r_1 - r_2)\mathbf{p} = r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1$ を $r_1 r_2$ で割る。$s_i = 1/r_i$、$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i/r_i$ とおくと、これは

$$(s_2 - s_1)\,\mathbf{p} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1.$$

となる。残りの 2 組の円に小問 (i) を適用すると（$r_3 \neq r_1$ かつ $r_3 \neq r_2$ であり、円どうしは重ならないので適用できる）、Q と R の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{q}$、$\mathbf{r}$ として

$$(s_3 - s_1)\,\mathbf{q} = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1, \qquad (s_3 - s_2)\,\mathbf{r} = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2.$$

を得る。右辺は $(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + (\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2) = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1$ を満たすので、

$$(s_2 - s_1)\,\mathbf{p} + (s_3 - s_2)\,\mathbf{r} = (s_3 - s_1)\,\mathbf{q}.$$

である。$s_3 \neq s_1$ であるから、

$$\mathbf{q} = \lambda\,\mathbf{p} + (1 - \lambda)\,\mathbf{r}, \qquad \text{ここで} \lambda = \frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1},$$

と書ける。2 つの係数 $\frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1}$ と $\frac{s_3 - s_2}{s_3 - s_1}$ の和が 1 になるからである。よって $\mathbf{q} = \mathbf{r} + \lambda(\mathbf{p} - \mathbf{r})$ であり、これは R と P を通る直線上の点である。ゆえに P、Q、R は一直線上にある。（たまたま P と R が一致する場合には、これから $Q = P = R$ も得られ、主張は自明に成り立つ。）

小問 (iii)

小問 (ii) より $\mathbf{q} = \lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{r}$ である。$P \neq R$ と仮定すると、点 $\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{r}$ が中点 $\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{r})$ になるのは、ちょうど $\lambda = \frac{1}{2}$ のときである（λ の値が異なれば直線上の異なる点を与える）。したがって条件は

$$\frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1} = \frac{1}{2} \iff 2s_2 = s_1 + s_3 \iff \frac{2}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \iff r_2 = \frac{2r_1 r_3}{r_1 + r_3}.$$

である。言葉で言えば、r_2 は r_1 と r_3 の調和平均（harmonic mean）でなければならない。（退化した場合 $P = R$ では、3 つの焦点はすべて一致し、半径がどうであれ Q は自明に中点である。）

検算

- 小問 (i)：$r_2 \to 0$ とすると C_2 は 1 点に縮み、式は $\mathbf{p} = \mathbf{x}_2$ を与える。1 点から引いた接線はその点を通るからである。また $\mathbf{p}$ は $\mathbf{x}_2 + \frac{r_2}{r_1 - r_2}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ であり、$r_2 < r_1$ のときは図のとおり小さい方の円の先にある。
- (iii) の数値例：中心を $(0,0)$、$(10,1)$、$(3,8)$、半径を 1、$\frac{3}{2}$、3 とする。このとき $\frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$ である。すると $P = (-20,-2)$、$R = (17,-6)$、$Q = (-\frac{3}{2},-4)$ となり、確かに Q は PR の中点である。
- これらの式はコンピュータでも確認した：多数のランダムな円の組について、2 本の接線の交点を直接求めると同じ点 P が得られる。

よくある間違い

- P が中心どうしを結ぶ直線上にある理由や、P が中心を結ぶ線分の外側にある理由を説明していない（2 つの中心を載せているのは P から出る**同じ**半直線である）。
- $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ と $\mathbf{r} - \mathbf{p}$ が平行であることを示そうとして、関係式の係数の和が零になることを確かめていない。関係式 $\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{r} = \mathbf{0}$ から一直線上にあることが導かれるのは、$\alpha + \beta + \gamma = 0$ のときに限る。

STEP のその先へ

焦点 P は、C_1 を C_2 に写す、正の拡大率 r_2/r_1 の拡大（相似変換、homothety）の中心である。小問 (ii) はモンジュ（Monge）の三円定理である：Q と R を中心とする拡大を合成すると P を中心とする拡大が得られ、2 つの拡大の合成の中心はそれぞれの中心を通る直線上にある。(ii) の計算は重心座標（barycentric coordinates、アフィン座

標）への最初の入り口であり、そこでは一直線上にあることが、係数の和が零になる線形関係式として表される。その背後にある線形写像については、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）で詳しく展開されており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）にはこの種の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。