解答例

STEP II 2015、第 7 問

純粋数学 ・ 交わる円

> **STEP II 2015、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q7

鍵となる考え方

2 つの円が 2 点で交わるとき、その 2 点を通る直線（共通弦（common chord））は中心線（line of centres）に垂直である。円 D が C を二等分する（bisect）のは、この弦が C の直径（diameter）であるとき、すなわち C の中心を通るときであり、またそのときに限る。すると、2 つの中心と交点の 1 つが作る直角三角形にピタゴラスの定理（Pythagoras' theorem）を用いることで、「二等分する」という条件はただ 1 つの等式（中心間の距離）$^2 = r^2 - a^2$ に変わる。

解答

小問 (i)

D の中心を Q、半径を r とし、原点を O とする。

一般的な条件。 D が C を二等分し、P と $P' = -P$ で交わるとする。ただし $|P| = a$ である。どちらの点も D 上にあるから、$QP = QP' = r$ である。よって Q は P と P' から等距離にあるので、PP' の垂直二等分線（perpendicular bisector）上にあり、この直線は O（PP' の中点）を通る。したがって $OQ \perp OP$ であり、三角形 OQP にピタゴラスの定理を用いると

$$r^2 = OQ^2 + a^2. \qquad (*)$$

を得る。逆に、D が $OQ^2 = r^2 - a^2$ かつ $OQ > 0$ を満たす任意の円であるとき、C 上に $OP \perp OQ$ となる点 P をとる。すると $QP^2 = OQ^2 + a^2 = r^2$ であり、$-P$ についても同様であるから、D は C の直径の両端にある 2 点を通る。異なる 2 つの円は高々 2 点でしか交わらないので、これらが唯一の交点であり、D は C を二等分する。

$r > a$ のときの存在。中心を x 軸上で O から距離 $\sqrt{r^2 - a^2} > 0$ の位置にとる：

$$(x - \sqrt{r^2 - a^2}\,)^2 + y^2 = r^2.$$

直接確かめると、この方程式から $x^2 + y^2 = a^2$ を引けば $-2x\sqrt{r^2 - a^2} + (r^2 - a^2) = r^2 - a^2$ となるので、（$r \neq a$ より）$x = 0$ であり、このとき $y = \pm a$ である。2 つの円はちょうど $(0, a)$ と $(0, -a)$ で交わり、これらは C 上で直径の両端にある。よって、この半径 r の円は C を二等分する。

$r \leq a$ のときの不可能性。半径 r のある円が C を二等分するならば、$(*)$ より $r^2 = OQ^2 + a^2 \geq a^2$ である。よって $r < a$ は起こりえない。$r = a$ ならば、$(*)$ から $OQ = 0$ となり、D は C そのものになる。これは C と無限個の点で交わり、ちょうど 2 点で交わるのではない。したがって、半径 $r \leq a$ の円で C を二等分するものは存在しない。

小問 (ii)

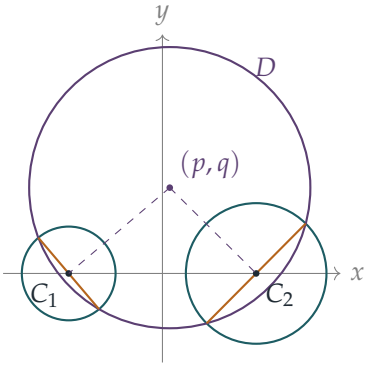
D の中心を (p, q) とする。各円に $(*)$ を用いると（原点をそれぞれの中心に移して考える）、

$$(p + d)^2 + q^2 = r^2 - a_1^2,$$
$$(p - d)^2 + q^2 = r^2 - a_2^2.$$

第 1 式から第 2 式を引くと、q^2 の項と p^2 の項が消えて $4pd = a_2^2 - a_1^2$ が残る。よって

$$p = \frac{a_2^2 - a_1^2}{4d},$$

となり、示すべき式が得られた。



図（$d = 2$、$a_1 = 1$、$a_2 = 1.5$、$r = 3$）では、各共通弦（琥珀色）は C_1 または C_2 の直径であり、中心どうしを結ぶ破線に垂直である。

q を求めるため、p を第 1 式に代入し直す。まず

$$p+d=\frac{4d^2+a_2^2-a_1^2}{4d},$$

であるから

$$q^2=r^2-a_1^2-\frac{(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2}{16d^2}=\frac{16d^2r^2-16d^2a_1^2-(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2}{16d^2}.$$

分子で引かれている項を展開すると

$$\begin{aligned}16d^2a_1^2+(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2&=16d^4+8d^2(a_2^2-a_1^2)+16d^2a_1^2+(a_2^2-a_1^2)^2\\&=16d^4+8d^2(a_1^2+a_2^2)+(a_2^2-a_1^2)^2\\&=(4d^2+(a_2-a_1)^2)(4d^2+(a_2+a_1)^2),\end{aligned}$$

となる。最後の行が成り立つのは、$(a_2-a_1)^2+(a_2+a_1)^2=2(a_1^2+a_2^2)$ かつ $(a_2-a_1)^2(a_2+a_1)^2=(a_2^2-a_1^2)^2$ だからである。したがって

$$q=\pm\frac{\sqrt{16r^2d^2-(4d^2+(a_2-a_1)^2)(4d^2+(a_2+a_1)^2)}}{4d}.$$

考えてみよう 不等式はどこから出てくるのだろうか。ここまでのところ、不等式らしきものは何も見当たらない。

中心 (p,q) は実数の点であるから、$q^2\geq 0$ である。$16d^2>0$ なので、これは

$$16r^2d^2\geq(4d^2+(a_2-a_1)^2)(4d^2+(a_2+a_1)^2),$$

を意味し、これが求める r の条件である。

小問 (i) の要請 $r>a_1$（および $r>a_2$）が追加の条件にならないことも確かめておくべきである。$d>a_1$ より $4d^2+a_2^2-a_1^2>0$ であるから $p+d>0$ であり、よって $r^2-a_1^2=(p+d)^2+q^2>0$ である。同様に、$d>a_2$ より $d-p>0$ であるから $r^2-a_2^2=(p-d)^2+q^2>0$ である。よって、求めた円 D は確かに C_1 と C_2 の両方を二等分する。

検算

- 対称な場合 $a_1=a_2=a$：このとき、y 軸に関する対称性から当然であるように $p=0$ となり、条件は $16r^2d^2\geq 4d^2(4d^2+4a^2)$、すなわち $r^2\geq d^2+a^2$ となる。これは中心を原点、つまり $(\pm d,0)$ の両方に最も近い位置においたときの $(*)$ にほかならない。

- 図の例では $p = 0.15625$、$q \approx 1.830$ であり、D と C_1 の交点はおよそ $(-1.353, -0.762)$ と $(-2.647, 0.762)$ である。その中点は $(-2, 0)$ で、C_1 の中心に一致する。この場合の r の最小値は約 2.377 である。
- C_1 と C_2 を入れ替える（$a_1 \leftrightarrow a_2$、$d \to -d$）と、p の式の形は変わらず、不等式も変わらない。当然そうなるべきである。

よくある間違い

- 小問 (i) で $r = a$ の場合を忘れること：$(*)$ は $OQ = 0$ を許すので、$D = C$ がなぜ該当しないのかを述べなければならない。
- 条件を $OQ^2 = r^2 + a^2$ と書くこと。これは二等分することと直角に交わること（直交円（orthogonal circles））を混同している。三角形を描いてみよ。直角は C の中心にあるので、斜辺は D の半径 r である。
- $q = +\sqrt{\cdots}$ だけを答えること：x 軸に関して折り返すと、もう 1 つの円が得られる。

STEP のその先へ

点 (p, q) と、中心 (x_0, y_0)、半径 r の円に対して、量 $(p - x_0)^2 + (q - y_0)^2 - r^2$ をその円に関する点の**方べき**（power）という。2 つの円に関する方べきが等しい点全体の集合は直線であり、これを**根軸**（radical axis）という。ここで行ったように 2 つの円の方程式を引き算すると、根軸が求まる。この問題では、二等分の条件は「C の中心の D に関する方べきが $-a^2$ である」と言い換えられる。これらの考え方や、関連する円に関する反転（inversion）は、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）で見事に展開されており、STEP 風の応用例の多くは Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）に収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。