解答例

STEP II 2015、第 6 問

純粋数学 • 対称性による積分

> **STEP II 2015、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q6

鍵となる考え方

$\sin x$ を $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ と書き直すと、$1 + \sin x$ は 2 倍角の式に変わり、あとは $\sec^2$ がすぐに積分できる。置換（substitution）$y = \pi - x$ は区間 $[0, \pi]$ をその中点に関して折り返すものであり、$\sin x$ はこの折り返しで変わらない。したがって、$\mathrm{f}(\sin x)$ の前にかかる多項式（polynomial）の因子は、それを折り返したものと取り替えることができる。小問 (iii) の 3 次式は、この取り替えによって x のべきがすべて一度に消えるように選ばれている。

解答

小問 (i)

$\sin x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ であり、また $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$ であるから、$\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$ とおくと

$$1 + \sin x = 1 + \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = 2\cos^2\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right).$$

両辺の逆数をとって 2 を掛けると $\sec^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = \dfrac{2}{1 + \sin x}$ となり、示すべき式が得られる。（両辺が定義されないのは同じ点、すなわち $\sin x = -1$ となる点である。）

よって

$$\int \frac{1}{1 + \sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sec^2\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = -\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) + C,$$

である。これは、合成関数の微分法（chain rule）により、$\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ を微分すると因子 $-\frac{1}{2}$ が現れるからである。

小問 (ii)

$I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$ とおく。$y = \pi - x$ とおくと $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$ であり、積分の端点 $x = 0, \pi$ は $y = \pi, 0$ となり、さらに $\sin x = \sin(\pi - y) = \sin y$ である。このとき

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{0} (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^{\pi} (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{\pi} y\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x - I, \end{aligned}$$

となる。ここで y は単なる積分変数（dummy variable）にすぎないことを用いた。よって $2I = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$ となり、これが求める結果である。

考えてみよう 未知の積分 I が両辺に現れた。これは問題だろうか？

問題ではない。むしろ、まさに望んでいたことである。この置換は I の値を直接求めるものではなく、I についての 1 次方程式を与えるのであり、それを解けばよい。

ここで $\mathrm{f}(t) = \dfrac{1}{1+t}$ とする。これは $t \in [0,1]$ で連続であり、$[0,\pi]$ 上で $\sin x$ がとる値はこの範囲にある。小問 (i) より

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) \Big]_0^{\pi} = -\tan\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right) + \tan\tfrac{1}{4}\pi = 1 + 1 = 2,$$

であり、$\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ は $[0,\pi]$ 上で連続である。引数が $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ の範囲にとどまるからである。したがって

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi.$$

小問 (iii)

同じ折り返しを用いる。$g(x) = 2x^3 - 3\pi x^2$ とおく。展開すると

$$\begin{aligned} g(\pi - x) &= 2(\pi^3 - 3\pi^2 x + 3\pi x^2 - x^3) - 3\pi(\pi^2 - 2\pi x + x^2) \\ &= -\pi^3 + 3\pi x^2 - 2x^3 = -\pi^3 - g(x). \end{aligned}$$

$J = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{g(x)}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$ とおく。小問 (ii) とまったく同様に置換 $y = \pi - x$ を行うと

$$J = \int_0^{\pi} \frac{g(\pi - y)}{(1+\sin y)^2}\,\mathrm{d}y = -\pi^3 K - J, \qquad \text{ただし} K = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^2}.$$

よって $J = -\frac{1}{2}\pi^3 K$ である。

考えてみよう なぜこの 3 次式はこれほどうまくいくのだろうか？

中点からの距離 $u = x - \frac{1}{2}\pi$ を用いて表すと、$g(x) = 2u^3 - \frac{3}{2}\pi^2 u - \frac{1}{2}\pi^3$ となる。$\sin x = \cos u$ であるから、関数 $1/(1+\sin x)^2$ は u について偶関数（even function）であり、したがって奇数次の項 $2u^3$ と $-\frac{3}{2}\pi^2 u$ は対称な区間で積分すると 0 になる。残るのは定数 $-\frac{1}{2}\pi^3$ だけであり、これは上で得た結果と一致する。小問 (ii) も $x = u + \frac{1}{2}\pi$ として同じことをしているのである。

K を求めるために、小問 (i) の恒等式を 2 乗する：$\dfrac{1}{(1+\sin x)^2} = \frac{1}{4}\sec^4\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$。$u = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$ と置換すると $\mathrm{d}x = -2\,\mathrm{d}u$ であり、$x = 0, \pi$ は $u = \frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi$ となる。$\sec^4 u = (1+\tan^2 u)\sec^2 u$ と書けば、その積分は $\tan u + \frac{1}{3}\tan^3 u$ であるから

$$K = \int_{\pi/4}^{-\pi/4} \tfrac{1}{4}\sec^4 u\,(-2\,\mathrm{d}u) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1+\tan^2 u)\sec^2 u\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\tan u + \tfrac{1}{3}\tan^3 u\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

したがって

$$\int_0^{\pi} \frac{2x^3 - 3\pi x^2}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^3}{2}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{2\pi^3}{3}.$$

検算

- $-\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ を微分すると $\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = 1/(1+\sin x)$ となる。
- 符号：小問 (ii) では被積分関数は正であり、$\pi \approx 3.14$ という値は妥当である。$\frac{1}{2} \le 1/(1+\sin x) \le 1$ より、積分は $\frac{1}{4}\pi^2 \approx 2.47$ と $\frac{1}{2}\pi^2 \approx 4.93$ の間にあるからである。小問 (iii) では $(0, \pi]$ 上で $2x^3 - 3\pi x^2 = x^2(2x - 3\pi) < 0$ であるから、負の答えは正しい。
- 数値積分（numerical quadrature）によれば $\int_0^{\pi}(1+\sin x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 1.33333$、小問 (iii) の積分は ≈ -20.6709 であり、それぞれ $\frac{4}{3}$ と $-\frac{2}{3}\pi^3$ に一致する。

よくある間違い

- 小問 (i) で合成関数の微分法による因子 $-\frac{1}{2}$ を落とし、$+2\tan(\dots)$ や $-\frac{1}{2}\tan(\dots)$ としてしまう。
- 積分の端点を入れ替えると $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$ のマイナス符号が打ち消されることを忘れる。
- 小問 (iii) で部分積分（integration by parts）を 3 回行おうとする。それでも解ける

が、折り返しを使えば 1 行で済む。

STEP のその先へ

小問 (ii) の技巧は対称性を利用している。重み関数がある折り返しで変わらないならば、被積分関数のうち折り返しの中心に関して偶である部分だけが積分に寄与する。この考え方は大学 1 年の数学のいたるところで出会うことになる。たとえばフーリエ級数（Fourier series）では奇関数は余弦の項をもたず、確率論では μ に関して対称な分布の平均は μ である。また、置換 $t = \tan\frac{1}{2}x$ は、$\sin x$ と $\cos x$ の任意の有理関数に対して使える系統的な別の方法である。この種の積分をさらに学ぶには、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。