解答例

STEP II 2015、第 5 問

純粋数学 • 逆正接関数の級数

STEP II 2015、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s2-q5

鍵となる考え方

正接の加法定理（tangent addition formula）を使うと、逆正接（arctangent）の和は一つの分数にまとまる。したがって $\tan S_n$ に関する帰納法（induction）は、丁寧に代数計算を進めれば済む。微妙なのは、$\tan S_n$ から S_n そのものへ進む段階である。正接の値がわかっても、角は π の整数倍の差を除いてしか定まらない。そのため、S_n がどの区間にあるかを確定させなければならない。小問 (ii) では、角 α_n がちょうど小問 (i) の逆正接になっていることがわかり、無限和は S_n の極限（limit）となる。

解答

小問 (i)

$\theta_m = \arctan\left(\frac{1}{2m^2}\right)$ とおく。すると $S_n = \theta_1 + \cdots + \theta_n$ であり、$\tan\theta_m = \frac{1}{2m^2}$ である。

$\tan S_n$ の公式。 $n = 1$ のとき $\tan S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ であるから、結果は成り立つ。

ある $n \geq 1$ について $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$ が成り立つと仮定する。$S_{n+1} = S_n + \theta_{n+1}$ であるから、加法定理により

$$\tan S_{n+1} = \frac{\tan S_n + \tan\theta_{n+1}}{1 - \tan S_n \tan\theta_{n+1}} = \frac{\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \dfrac{n}{2(n+1)^3}}.$$

積 $\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2(n+1)^2}$ は 1 より小さいので、分母は 0 にならない。分子と分母に $2(n+1)^3$ を

掛けると、

$$\tan S_{n+1} = \frac{(n+1)(2n(n+1)+1)}{2(n+1)^3 - n} = \frac{(n+1)(2n^2+2n+1)}{2n^3+6n^2+5n+2}.$$

考えてみよう 分母がうまく因数分解できると、なぜわかるのだろうか。

目標は $\frac{n+1}{n+2}$ であるから、分母は $(n+2)(2n^2+2n+1)$ になるはずである。展開すると確かに $(n+2)(2n^2+2n+1) = 2n^3+6n^2+5n+2$ となる。正の因数 $2n^2+2n+1$ で約分すると

$$\tan S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2},$$

となり、これは $n+1$ の場合の結果である。数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ について $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$ である。

S_n の公式。 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$ だけからは、ある整数 k について $S_n = \arctan \frac{n}{n+1} + k\pi$ であるとしか言えない。$k = 0$ を示すために、再び帰納法で

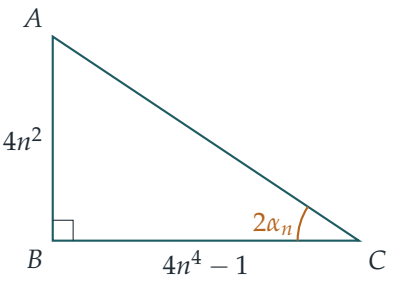
$$S_n = \arctan \frac{n}{n+1}.$$

を証明する。$n = 1$ のとき $S_1 = \arctan \frac{1}{2}$ であり、成り立つ。ある n について結果が成り立つと仮定する。$0 < \frac{n}{n+1} < 1$ であるから、$0 < S_n < \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$ である。また $0 < \frac{1}{2(n+1)^2} < 1$ であるから、$0 < \theta_{n+1} < \frac{1}{4}\pi$ である。これらを足して

$$0 < S_{n+1} = S_n + \theta_{n+1} < \tfrac{1}{2}\pi.$$

よって S_{n+1} は $[0, \frac{1}{2}\pi)$ にあり、これはちょうど非負の数に対する arctan の値域である。さらに最初の結果より $\tan S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ である。tan はこの区間で一対一（one-to-one）であるから、$S_{n+1} = \arctan \frac{n+1}{n+2}$ となる。以上で帰納法が完結する。

小問 (ii)



B における角は直角であるから、角 C の対辺は AB、隣辺は BC である（$n \geq 1$ のとき $4n^4 - 1 > 0$ であることに注意）。よって

$$\tan 2\alpha_n = \frac{AB}{BC} = \frac{4n^2}{4n^4 - 1}.$$

小問 (i) から、$\tan \alpha_n = \frac{1}{2n^2}$ を試してみたくなる。$t = \frac{1}{2n^2}$ とすると、倍角の公式（double-angle formula）により

$$\frac{2t}{1 - t^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{4n^4}} = \frac{4n^2}{4n^4 - 1},$$

となり、一致する。これが単に条件を満たす値の一つではなく、求める値そのものであることを確かめるため、$t = \tan \alpha_n$ とおく。方程式 $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{4n^2}{4n^4-1}$ を整理すると二次方程式（quadratic equation）

$$4n^2t^2 + 2(4n^4 - 1)t - 4n^2 = 0,$$

が得られ、その二つの解の積は -1 である。一方の解は $\frac{1}{2n^2}$ であるから、もう一方は $-2n^2 < 0$ である。しかし $2\alpha_n$ は直角三角形の直角以外の角であるから $0 < 2\alpha_n < \frac{1}{2}\pi$ であり、$0 < \alpha_n < \frac{1}{4}\pi$、したがって $t > 0$ である。ゆえに $\tan \alpha_n = \frac{1}{2n^2}$ であり、α_n は arctan の値域にあるから

$$\alpha_n = \arctan \frac{1}{2n^2}.$$

考えてみよう ここで無限和とは何を意味するのか。また、小問 (i) はどのように役立つのか。

無限和とはその部分和（partial sums）の極限であり、小問 (i) により部分和は

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n = S_N = \arctan \frac{N}{N+1}.$$

である。$N \to \infty$ のとき $\frac{N}{N+1} \to 1$ であり、arctan は連続（continuous）であるから、$\arctan \frac{N}{N+1} \to \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$ となる。したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \tfrac{1}{4}\pi,$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- $n = 1$ のとき、小問 (ii) の三角形はおなじみの 3–4–5 の三角形であり、$\tan 2\alpha_1 = \frac{4}{3}$ である。このとき $\tan \alpha_1 = \frac{1}{2}$ は $\frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ を満たす。

- $S_2 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{8}$ であり、$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ となって、公式の予測どおりである。
- 数値的には、最初の 2000 項を足すと $S_{2000} \approx 0.785148$ となり、$\frac{1}{4}\pi \approx 0.785398$ と比べられる。差はおよそ $\frac{1}{4000}$ であり、これは当然である。実際、減法定理により $\frac{1}{4}\pi - \arctan\frac{N}{N+1} = \arctan\frac{1}{2N+1}$ が厳密に成り立つ。

よくある間違い

- S_n が $[0, \frac{1}{2}\pi)$ にあることを示さずに、$\tan S_n = \frac{n}{n+1}$ からただちに $S_n = \arctan\frac{n}{n+1}$ と結論してしまう。
- 二次方程式のもう一方の解を除外せずに、うまく当たった推測から $\tan\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$ としてしまう。
- 無限和が S_N の極限であることを述べずに、それを S_∞ として扱ってしまう。

STEP のその先へ

これは姿を変えたテレスコーピング級数（telescoping series）である。$\frac{1}{2m^2} = \frac{(2m+1)-(2m-1)}{1+(2m+1)(2m-1)}$ であるから、各項は $\arctan(2m+1) - \arctan(2m-1)$ に等しく、和は打ち消し合って $\arctan(2n+1) - \frac{1}{4}\pi$ となり、これは $\arctan\frac{n}{n+1}$ に等しい。無限和を部分和の極限として定義し、極限と連続関数の順序をいつ入れ替えてよいかを知ることは、解析学（analysis）の最初の講義の出発点である。これについて読むには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。