解答例

STEP II 2015、第 4 問

純粋数学 • 逆正接関数の分枝

> **STEP II 2015、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q4

鍵となる考え方

$\tan\theta$ の値がわかっても、θ は π の整数倍の差を除いてしか定まらない。したがって各方程式には無限個の解の分枝（branch）があり、それらは互いに π ずつ上下に平行移動したものである。連続性（continuity）と $x = 0$ での値によって分枝が一つ選ばれる。さらに連続性により、右辺が $\pm\infty$ に発散するたびに分枝を**乗り換え**なければならない。それはちょうど角が $\frac{1}{2}\pi$ の奇数倍を通過する瞬間である。そこで各小問では、まず右辺のグラフを描き、それから角を連続的に追跡する。

以下、arctan は主値（principal value）を表し、$-\frac{1}{2}\pi < \arctan u < \frac{1}{2}\pi$ とする。

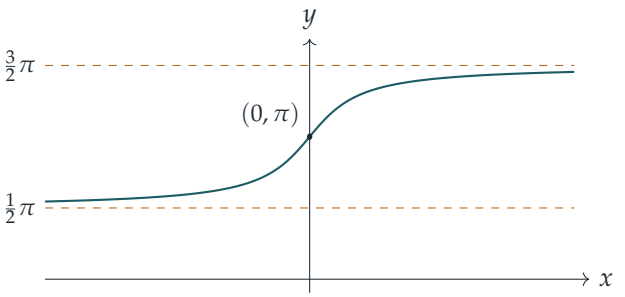
解答

小問 (i)

$\tan\theta = x$ の解はすべて、整数 n を用いて $\theta = \arctan x + n\pi$ と表される。関数 $\arctan x$ は実数全体で連続であるから、$\mathrm{f}(x) - \arctan x$ は $\{n\pi\}$ の値のみをとる連続関数である。連続関数がこれらの孤立した値の間を跳ぶことはできないので、これは定数である。$\mathrm{f}(0) = \pi$ かつ $\arctan 0 = 0$ であるから、その定数は π である：

$$\mathrm{f}(x) = \pi + \arctan x.$$

したがってこの曲線は、通常の arctan の曲線を π だけ持ち上げたものである。狭義単調増加（strictly increasing）であり、（$\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ であるから）傾き 1 で $(0, \pi)$ を通り、$x \to -\infty$ のとき $y = \frac{1}{2}\pi$、$x \to \infty$ のとき $y = \frac{3}{2}\pi$ を水平漸近線（horizontal asymptote）にもつ。また $\mathrm{f}(-x) = 2\pi - \mathrm{f}(x)$ であるから、$(0, \pi)$ に関して位数 2 の回転対称性をもつ。



小問 (ii)

曲線 $y = \dfrac{x}{1+x^2}$。これを $q(x)$ とおく。これは奇関数（odd function）であり、零となるのは $x = 0$ のときに限り、その符号は x の符号と一致する。$x \to \pm\infty$ のとき $q(x) \approx 1/x \to 0$ であるから、x 軸が漸近線であり、右側では上から、左側では下から近づく。微分すると

$$q'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

であるから、停留点（stationary point）は $x = \pm 1$ にあり、極大点 $(1, \frac{1}{2})$ と極小点 $(-1, -\frac{1}{2})$ である。（同じことであるが、相加・相乗平均の不等式（AM–GM）より $1 + x^2 \geq 2|x|$ であるから、$|q(x)| \leq \frac{1}{2}$ である。）原点における傾きは 1 である。

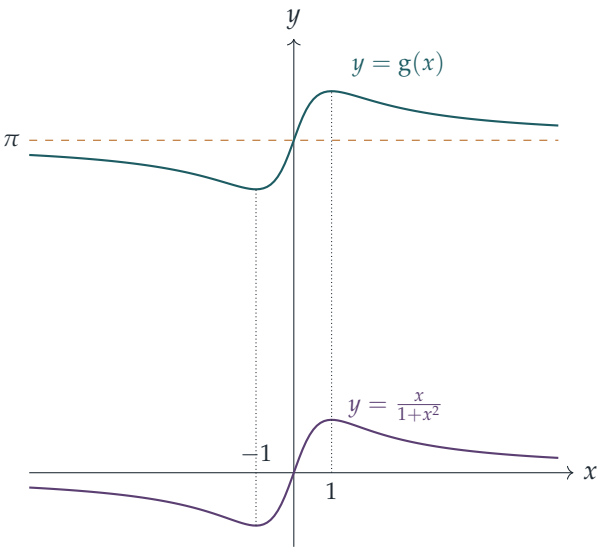
曲線 $y = \mathrm{g}(x)$。今度は右辺 $q(x)$ が連続かつ有界であるから、小問 (i) とまったく同じ議論により

$$\mathrm{g}(x) = \pi + \arctan\frac{x}{1+x^2}.$$

を得る。arctan は増加関数であるから、g は q が増減するところでちょうど同じように増減する。したがって

- $x \to \pm\infty$ のとき $\mathrm{g}(x) \to \pi$ である（右側では上から、左側では下から近づく）。
- g は $x = 1$ で極大値 $\pi + \arctan\frac{1}{2} \approx 3.61$ をとり、$x = -1$ で極小値 $\pi - \arctan\frac{1}{2} \approx 2.68$ をとる。
- 傾き $\dfrac{q'(0)}{1+q(0)^2} = 1$ で $(0, \pi)$ を通る。

その形は q のグラフを（$u > 0$ のとき $\arctan u < u$ であるから）わずかに平らにし、π だけ持ち上げたものである。$\frac{1}{2}\pi$ や $\frac{3}{2}\pi$ に近づくことはないので、分枝を乗り換える必要は一度もない。



小問 (iii)

曲線 $y = \dfrac{x}{1-x^2}$。これを $r(x)$ とおく。これは奇関数であり、零となるのは $x = 0$ のときに限り、$x = \pm 1$ に垂直漸近線（vertical asymptote）をもつ。$x \to \pm\infty$ のとき $r(x) \approx -1/x \to 0$ である。導関数は

$$r'(x) = \frac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0,$$

であるから、r は定義されている 3 つの区間のそれぞれで狭義単調増加である。x と $1-x^2$ の符号を読み取ると、

- $x < -1$ では、r は 0^+（$x \to -\infty$ のとき）から $+\infty$（$x \to -1^-$ のとき）まで増加する。
- $-1 < x < 1$ では、r は $-\infty$ から $+\infty$ まで増加し、傾き 1 で原点を通る。
- $x > 1$ では、r は $-\infty$（$x \to 1^+$ のとき）から 0^-（$x \to \infty$ のとき）まで増加する。

曲線 $y = \mathrm{h}(x)$。各区間ごとに見れば r は連続であるから、そこでは $\mathrm{h}(x) - \arctan r(x)$ は π の定数倍である。ただし、その倍数は区間ごとに異なりうる。これを区間ごとに求める。

$-1 < x < 1$ では、条件 $\mathrm{h}(0) = \pi$ より $\mathrm{h}(x) = \pi + \arctan r(x)$ である。$x \to 1^-$ のとき $r \to +\infty$ であるから $\mathrm{h}(x) \to \pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$ となり、$x \to -1^+$ のとき $r \to -\infty$ であるから $\mathrm{h}(x) \to \frac{1}{2}\pi$ となる。$x = \pm 1$ での連続性から、$\mathrm{h}(1) = \frac{3}{2}\pi$ かつ $\mathrm{h}(-1) = \frac{1}{2}\pi$ でなければならない。

考えてみよう $x=1$ のすぐ右では $r(x)$ は絶対値の大きな負の数であるから、$\arctan r(x)$ は $-\frac{1}{2}\pi$ に近い。h が $x=1$ で連続になるためには、π のどの倍数を加えればよいか？

$x>1$ では $\mathrm{h}(x)=n\pi+\arctan r(x)$ であり、$x\to 1^+$ のときこれは $n\pi-\frac{1}{2}\pi$ に近づく。これが $\frac{3}{2}\pi$ に等しくなるには $n=2$ でなければならない。同様に、$x<-1$ では $x\to -1^-$ のとき $\mathrm{h}(x)=m\pi+\arctan r(x)\to m\pi+\frac{1}{2}\pi$ であり、これを $\frac{1}{2}\pi$ に一致させるには $m=0$ が必要である。したがって

$$\mathrm{h}(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & x<-1,\\[2mm] \pi+\arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & -1<x<1,\\[2mm] 2\pi+\arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & x>1,\end{cases}\qquad \mathrm{h}(\pm1)=\pi\pm\tfrac{1}{2}\pi.$$

このように、r が $+\infty$ へ跳ね上がって $-\infty$ から再び現れるとき、角 h はそのまま $\frac{3}{2}\pi$ を通過して増加し続ける（$x=-1$ で $\frac{1}{2}\pi$ を通過するときも同様である）。

では、グラフの特徴をまとめる。

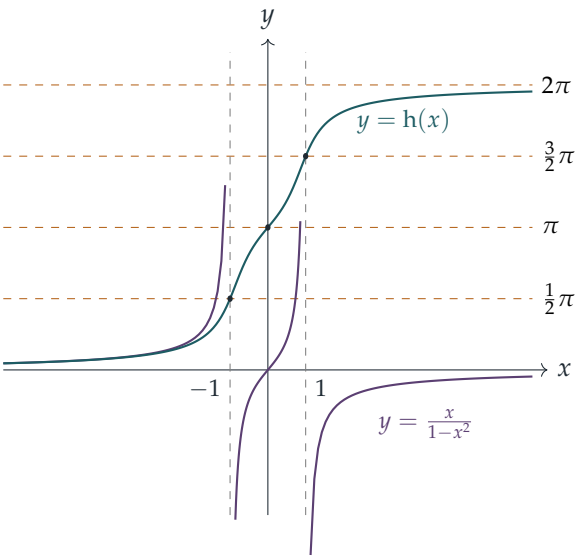
- **漸近線。** $x\to-\infty$ のとき $r\to 0^+$ であるから $\mathrm{h}(x)\to 0$（上から近づく）であり、$x\to\infty$ のとき $r\to 0^-$ であるから $\mathrm{h}(x)\to 2\pi$（下から近づく）である。
- **単調性。** ±1 以外では、合成関数の微分法（chain rule）により

$$\mathrm{h}'(x)=\frac{r'(x)}{1+r(x)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2+x^2}=\frac{1+x^2}{x^4-x^2+1}>0.$$

  （分母は $(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ である。）この式は $x=\pm1$ でもまったく問題なく定義され、そこでの値は 2 であるから、h はそこで滑らかである。曲線は $(1,\frac{3}{2}\pi)$ と $(-1,\frac{1}{2}\pi)$ を傾き 2 で通り、折れ曲がりはない。
- **主要な点。** 傾き 1 で通る $(0,\pi)$、および傾き 2 で通る $(\pm1,\pi\pm\frac{1}{2}\pi)$。
- **対称性。** $\mathrm{h}(-x)=2\pi-\mathrm{h}(x)$ であるから、曲線は $(0,\pi)$ に関して回転対称である。

したがって h は 0 から 2π まで単調に増加し、小問 (i) の曲線と同様の S 字形であるが、高さはその 2 倍に及ぶ。グラフにおいて、r の漸近線 $x=\pm1$ は、h が $\frac{1}{2}\pi$ と $\frac{3}{2}\pi$ を横切る点とちょうど一直線に並ぶ。

3 つの場合をまとめて書くすっきりした方法がある：$\mathrm{h}(x)-\pi$ は、点 $(1-x^2,x)$ の、$(-\pi,\pi)$ にとった偏角（polar angle）である。この点は原点にも負の横軸にも決して到達しない（$1-x^2\le 0$ のとき $x\neq 0$ である）。これが、角が連続的に変化する理由である。



検算

- 各式は定義の方程式を満たす。例えば $\tan(2\pi+\theta)=\tan\theta$ であり、0 での値はいずれも π である。
- 具体的な値：$\mathrm{g}(1)=\pi+\arctan\frac{1}{2}\approx 3.605$、また $\mathrm{h}(2)=2\pi+\arctan(-\frac{2}{3})\approx 5.695$ であり、これはグラフが示すとおり $\frac{3}{2}\pi\approx 4.712$ と $2\pi\approx 6.283$ の間にある。
- h の連続性：$\mathrm{h}(0.999)\approx 4.710$、$\mathrm{h}(1.001)\approx 4.714$ であり、$\frac{3}{2}\pi\approx 4.712$ の両側にあって、$x=1$ での傾きが 2 であることと整合する。$[-10,10]$ を細かく刻んで調べた計算機による検証でも、f、g、h のいずれもどこにも跳びがないことが確認された。

よくある間違い

- すべての x に対して $\mathrm{h}(x)=\pi+\arctan\frac{x}{1-x^2}$ と書いてしまうこと。これは $x=1$ で π だけ下に跳び、$x=-1$ で π だけ上に跳ぶので、連続ではない。
- $\frac{x}{1-x^2}$ が垂直漸近線をもつからといって、$y=\mathrm{h}(x)$ にも $x=\pm1$ で垂直漸近線を描いてしまうこと。角は有限のままであり、発散するのはその正接だけである。
- $y=\mathrm{h}(x)$ の $x=\pm1$ に角（かど）を描いてしまうこと。そこでの傾きは両側とも 2 である。

STEP のその先へ

ここで行ったのは、多価の逆関数の連続な**分枝**を選ぶことであり、「正接が無限大を通過するたびに π を加える」という規則は、道を被覆空間（covering space）へ持ち上げること（lifting）の最初の体験である。同じ考え方を複素対数関数と $\arg z$ に適用したものが、複素解析（complex analysis）における回転数（winding number）や偏角の原理（argument principle）の基礎となっている。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）はこれを幾何学的に展開しており、読んでいて楽しい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。