解答例

STEP II 2015、第 3 問

純粋数学 • 数え上げと数学的帰納法

> **STEP II 2015、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q3

鍵となる考え方

三角形を最も長い棒によって分類する。T_n には数えられるが T_{n-1} には数えられない三角形は、ちょうど長さ n の棒を使うものである。したがって $T_n - T_{n-1}$ は、$a+b \geq n$ を満たす組 $a < b < n$ の個数に等しい。中間の棒 b を一つ固定するごとにその個数は簡単に数えられ、しかもそれらの個数は等差数列（arithmetic progression）をなす。連続する二つの差を足し合わせると $T_{2m} - T_{2m-2}$ が得られ、これはまさに帰納法（induction）の段階で必要となるものである。

解答

最も長い棒が c である三角形を数える

T_n に数えられる三角形は、棒 $a < b < c \leq n$ からなる。そのうち $c \leq n-1$ であるものは、ちょうど T_{n-1} に数えられる三角形である。よって

$$T_n - T_{n-1} = \#\{(a,b) : 1 \leq a < b < n,\ a+b \geq n\}.$$

中間の棒 b を固定する。必要な条件は $n-b \leq a \leq b-1$ である（$b < n$ であるから $a \geq 1$ は自動的に成り立つ）。したがって $2b - n > 0$ のときは $2b-n$ 通りの選び方があり、そうでないときは選び方は一つもない。よって b は $\frac{n}{2}$ より大きい最小の整数から $n-1$ まで動く。

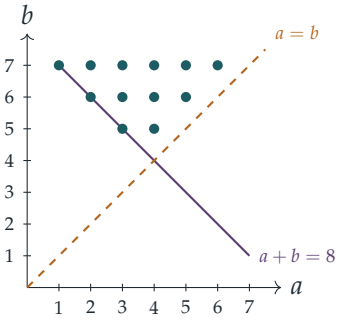
$n = 8$ の場合

$c = 8$ のとき、中間の棒としてありうるのは $b = 5, 6, 7$ であり、a の選び方はそれぞれ 2、4、6 通りである：

$$b = 5 : \ a \in \{3, 4\}, \qquad b = 6 : \ a \in \{2, 3, 4, 5\}, \qquad b = 7 : \ a \in \{1, \ldots, 6\}.$$

（$b = 4$ とすると $4 \leq a \leq 3$ が必要となり、これは不可能である。）ゆえに $T_8 - T_7 = 2 + 4 + 6 = 12$ となり、求める結果が得られた。

下の図は、これら 12 個の組 (a, b) を示している。すなわち、直線 $a + b = 8$ 上またはその上側にあり、かつ対角線 $a = b$ より真に上側にある点である。



$T_7 - T_6$ については、最も長い棒は 7 であり、中間の棒 $b = 4, 5, 6$ に対して選び方は $2b - 7 = 1, 3, 5$ 通りである。よって $T_7 - T_6 = 1 + 3 + 5 = 9$ となる。したがって

$$T_8 - T_6 = (T_8 - T_7) + (T_7 - T_6) = 12 + 9 = 21.$$

一般の差

$n = 2m$ のとき、中間の棒は $b = m + 1, \ldots, 2m - 1$ を動き、選び方は $2b - 2m = 2, 4, \ldots, 2(m - 1)$ 通りである：

$$T_{2m} - T_{2m-1} = 2 + 4 + \cdots + 2(m - 1) = m(m - 1).$$

$n = 2m - 1$ のとき、中間の棒は $b = m, \ldots, 2m - 2$ を動き、選び方は $2b - (2m - 1) = 1, 3, \ldots, 2m - 3$ 通りである。最初の $m - 1$ 個の奇数の和は $(m - 1)^2$ である。これらを足し合わせると

$$T_{2m} - T_{2m-2} = m(m - 1) + (m - 1)^2 = (m - 1)(2m - 1).$$

（$m = 4$ とすると、これらは 12 と 21 を与え、上で求めた値と一致する。）これらの式は、小さい方の添字が 3 以上であればいつでも成り立つ。すなわち、二つ目の式では $m \geq 3$ のときである。

帰納法

$f(m)=\frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$ とおく。すべての $m\geq 2$ に対して $T_{2m}=f(m)$ が成り立つことを証明する。

基底段階（*base case*）、$m=2$。棒 $1,2,3,4$ からの選び方は $(1,2,3)$、$(1,2,4)$、$(1,3,4)$、$(2,3,4)$ の四通りであり、$(1,2,4)$ 以外はすべて $a+b\geq c$ を満たす。よって $T_4=3$ であり、また $f(2)=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 1\cdot 9=3$ である。

帰納段階（*inductive step*）。ある $k\geq 3$ に対して $T_{2k-2}=f(k-1)$ が成り立つと仮定する。差の公式より

$$T_{2k}=f(k-1)+(k-1)(2k-1),$$

であるから、$f(k)-f(k-1)=(k-1)(2k-1)$ を示せば十分である。

> **考えてみよう** 二つの3次式を完全に展開することなく、$f(k)-f(k-1)$ をどのように整理すればよいか？

どちらの項も因数 $k-1$ を含むので、まずそれをくくり出す：

$$\begin{aligned} f(k)-f(k-1) &= \tfrac{1}{6}(k-1)\big[k(4k+1)-(k-2)(4k-3)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}(k-1)\big[(4k^2+k)-(4k^2-11k+6)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}(k-1)(12k-6)=(k-1)(2k-1). \end{aligned}$$

ゆえに $T_{2k}=f(k)$ である。数学的帰納法により、すべての $m\geq 2$ に対して $T_{2m}=\frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$ が成り立つ。

棒の本数が奇数の場合

$T_{2m-1}=T_{2m}-m(m-1)$ を用いると

$$T_{2m-1}=\tfrac{1}{6}m(m-1)(4m+1)-m(m-1)=\tfrac{1}{6}m(m-1)(4m-5)\qquad (m\geq 2).$$

棒の本数を代わりに $2m+1$ と書けば（m を $m+1$ に置き換える）、これは次のようになる。

$$T_{2m+1}=\tfrac{1}{6}m(m+1)(4m-1)\qquad (m\geq 1).$$

たとえば $T_3=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$ であり、これはただ一つの三角形 $(1,2,3)$ に対応する。

検算

- 公式から $T_6=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 2\cdot 13=13$、$T_7=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 4\cdot 11=22$、$T_8=\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 3\cdot 17=34$ が得られる。よって $T_8-T_7=12$、$T_8-T_6=21$ となり、直接求めた値と一致する。

- $\{1,\ldots,n\}$ から選んだすべての三つ組をコンピュータで数え上げた結果は、3 から 79 までのすべての n について、二つの閉じた式（closed form）の両方と一致する。
- $n = 2m$ とすると、偶数の場合の式はおよそ $\frac{2}{3}m^3 = \frac{n^3}{12}$ であり、奇数の場合の式も同様に振る舞う。これはありうる三つ組の個数 $\binom{n}{3} \approx \frac{n^3}{6}$ の半分である。したがって n が大きいとき、三本の棒の選び方のうちおよそ半分が三角形をつくる。

よくある間違い

- 棒がすべて異なること、すなわち $a < b$ が真の不等号であることを忘れる。$a = b$ を許すと数えすぎになる。
- 面積が 0 の三角形（退化三角形（degenerate triangle））を落とす。条件は $a + b \geq c$ であるから、$(1,2,3)$ も数に入る。
- 帰納法を $m = 1$ から始める。$n \geq 3$ が必要なので、T_2 は定義されていない。

STEP のその先へ

図のように領域内の格子点（lattice points）を数えることは、分割（partitions）と母関数（generating functions）の理論の出発点である。T_n は有理関数で表される母関数をもち、n が偶数か奇数かで場合が分かれることは、その分母に因数 $1 - x^2$ があることを反映している。このように、個数が n の多項式で表され、しかもその多項式が n の剰余に依存するような結果は、準多項式（quasi-polynomials）とよばれる。漸化式や数え上げの議論についてさらに知りたい場合は、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。