解答例

STEP II 2015、第 2 問

純粋数学 • 三角形の幾何

STEP II 2015、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

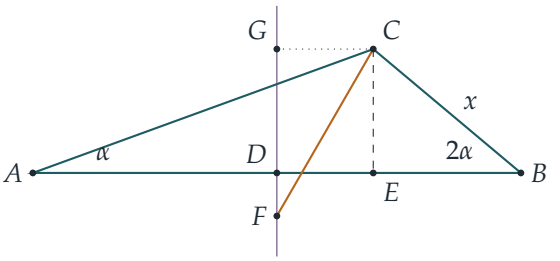
step.maths.org/questions/15-s2-q2

鍵となる考え方

最初の結果は、正弦定理（sine rule）と $\sin 3\alpha$ の 3 倍角の公式（triple-angle formula）から得られる。DE については、すべてを AB に沿って一方の端から測る。CE の両側にある直角三角形（right-angled triangle）から AE と BE が直接求まる。DE の答えは驚くほど簡単な形になり、その簡単さこそが三等分（trisection）を成り立たせている。それは C が垂直二等分線（perpendicular bisector）からどれだけ離れているかを教えてくれ、それを $CF = x$ と比べることで角がひとつに定まるのである。

解答

以下を通して、C における角は $\angle ACB = \pi - 3\alpha$ であり、2α は鋭角であるから $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ である。



長さ AB

正弦定理により、$\sin(\pi - 3\alpha) = \sin 3\alpha$ を用いると

$$\frac{AB}{\sin 3\alpha} = \frac{x}{\sin \alpha}.$$

3倍角の公式 $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ を用い、$\sin\alpha \neq 0$ で割ると

$$AB = x\,\frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = (3 - 4\sin^2\alpha)\,x,$$

となり、示すべき式が得られる。

長さ DE

A と B における角はともに鋭角であるから、C から下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）E は A と B の間にある。直角三角形 CEB において

$$BE = x\cos 2\alpha, \qquad CE = x\sin 2\alpha.$$

したがって

$$AE = AB - BE = x(3 - 4\sin^2\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha)) = x(2 - 2\sin^2\alpha) = 2x\cos^2\alpha,$$
$$AD = \tfrac{1}{2}AB = x(\tfrac{3}{2} - 2\sin^2\alpha).$$

引き算すると

$$AE - AD = x(2 - 2\sin^2\alpha - \tfrac{3}{2} + 2\sin^2\alpha) = \tfrac{1}{2}x.$$

これは正であるから、E は D と B の間にあり、

$$DE = \tfrac{1}{2}x,$$

となる。これは α によらない。

三等分

C から AB の垂直二等分線 DF に下ろした垂線の足を G とする。CE と GD はともに AB に垂直であるから、$CGDE$ は長方形であり、$CG = DE = \frac{1}{2}x$ である。また CG は AB に平行、すなわち CE に垂直である。

? **考えてみよう** $CF = x$ をどのようにして角に結びつければよいか。

三角形 CGF は G に直角をもち、斜辺は $CF = x$、一辺は $CG = \frac{1}{2}x$ である。よって

$$\cos\angle GCF = \frac{CG}{CF} = \frac{1}{2}, \qquad \text{よって} \qquad \angle GCF = \frac{\pi}{3}.$$

垂直二等分線上で C からの距離が x である点は、G の両側にひとつずつ、計 2 つある。半直線 CE（AB に向かって下向き）から A の方へ回転して角を測ると、半直線 CG は角 $\frac{\pi}{2}$ の位置にあるので、候補となる 2 本の半直線 CF は角 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$（$G$ より下の点）と $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$（$G$ より上の点）の位置にある。

次に、どちらが AC に関して B と同じ側にあるかを決める。直角三角形 ACE において $\angle ACE=\frac{\pi}{2}-\alpha$ であるから、半直線 CA は同じ側に CE から角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ の位置にある。直線 AC に関して B の側にある C からの半直線は、このように測って $\frac{\pi}{2}-\alpha$ より小さい角の位置にあるもの（または CE の反対側、B の方にあるもの）である。$\alpha<\frac{\pi}{4}$ であるから

$$\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{5\pi}{6},$$

となり、G より下の点は B の側にあり、G より上の点はそうでない。よって F は下の点であり、$\angle ECF=\frac{\pi}{6}$ で、半直線 CF は角 ACE の内部、したがって $\angle ACB$ の内部にある。ゆえに

$$\angle ACF=\angle ACE-\angle ECF=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}-\alpha=\frac{1}{3}(\pi-3\alpha)=\frac{1}{3}\angle ACB.$$

したがって CF は CA の隣で $\angle ACB$ の 3 分の 1 を切り取り（$\angle FCB=\frac{2}{3}\angle ACB$ である）、直線 FC は角 ACB を三等分する。

検算

- $\alpha=\frac{\pi}{6}$ のとき、三角形の角は 30°、60°、90° であり、$AB=(3-1)x=2x$ はおなじみの斜辺の長さである。このとき $AE=2x\cos^2 30^\circ=\frac{3}{2}x$、$AD=x$ であるから $DE=\frac{1}{2}x$ となる。C における角は 90° であり、$\angle ACF=60^\circ-30^\circ=30^\circ$ はその 3 分の 1 である。
- $\alpha=20^\circ$、$x=1$ のとき、$AB\approx 2.532$、$\angle ACB=120^\circ$ であり、座標から直接 F を作図すると $\angle ACF=40^\circ$ となる。3 つの結果はすべて、数千個のランダムな三角形についてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- F を G より上にとってしまうこと。その点も C からの距離は x であるが、AC に関して反対側にある。問題文がどちらの側かを指定しているのはそのためである。
- DE を長さの差として書く前に、E が A と B の間にあること（および D のどちら側にあるか）を確かめ忘れること。

STEP のその先へ

一般の角を定規とコンパスで三等分することは不可能であり、この事実は体論（field theory）を用いて証明される。60° を三等分するには既約な3次方程式（irreducible cubic）の根を作図しなければならないが、作図可能な（constructible）長さは常に2次方程式を積み重ねたものしか満たさないのである。ここでは三角形が追加の情報（B における角が A における角の2倍であること）を与えており、それによって簡単な作図で三等分が実現できるのである。さらに美しい三角形の幾何については、コクセター（Coxeter）と Greitzer の *Geometry Revisited*（邦訳『幾何学再入門』）を、不可能性の証明については Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。