解答例

STEP II 2015、第 13 問

確率・統計 ・ 指数分布のモーメント

> **STEP II 2015、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q13

鍵となる考え方

費用は、一定額 ky と、洪水が備えを越えない限り 0 である確率的な額との和である。したがって、すべては洪水が備えた高さを超える超過分 $W = \max(X - y, 0)$ のモーメント（moments）に帰着する。指数分布（exponential distribution）は**無記憶性**（*memoryless property*）**をもつ**。すなわち、$X > y$ という条件のもとで、超過分 $X - y$ は再び同じパラメータの指数分布に従う。これにより、期待値（expectation）も分散（variance）も一行の計算で求まる。

解答

$p = \mathrm{P}(X > y) = \int_y^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda y}$ とおき、

$$W = \begin{cases} X - y & \text{ただし} X > y, \\ 0 & \text{ただし} X \le y, \end{cases} \qquad \text{このとき} \qquad C = ky + aW.$$

と定める。ここで $y \ge 0$ はあらかじめ選んだ定数であるから、ky は確率的ではない。

小問 (i)

$X \le y$ のとき $W = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W) &= \int_y^\infty (x - y)\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty u\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(u+y)}\,\mathrm{d}u \qquad (u = x - y) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda y} \int_0^\infty u\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda y} \cdot \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

となる。ここで、パラメータ λ の指数分布の平均が $\frac{1}{\lambda}$ であることを用いた（部分積分（integration by parts）で計算してもよい）。したがって

$$\mathrm{E}(C) = ky + a\,\mathrm{E}(W) = ky + \frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y},$$

であり、これが示すべきことであった。

最小化。$y \geq 0$ に対して $g(y) = ky + \frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y}$ とおく。すると

$$g'(y) = k - a\mathrm{e}^{-\lambda y}, \qquad g''(y) = a\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y} > 0,$$

であるから、g' は狭義単調増加であり、$g'(0) = k - a$ から始まって $y \to \infty$ のとき k に近づく。

> ? **考えてみよう** なぜ単に $g'(y) = 0$ とおいて終わりにできないのだろうか？

y は $y \geq 0$ に制限されており、停留点（stationary point）$\mathrm{e}^{-\lambda y} = k/a$ がその範囲にあるのは $k/a \leq 1$ のときに限られるからである。そこで a/k の値によって場合分けする。

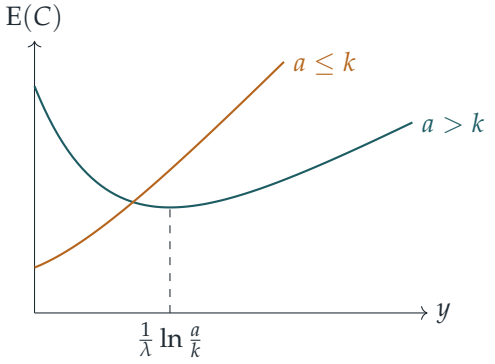
- **$a/k > 1$ の場合**。このとき $g'(0) = k - a < 0$ であり、

  $$y = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{a}{k} > 0.$$

  において $g'(y) = 0$ となる。g' は増加関数であるから、g はこの点より前で減少し、後で増加する。よってこれは $y \geq 0$ における最小値（global minimum）を与える。最小の期待費用は $\frac{k}{\lambda}\left(1 + \ln\frac{a}{k}\right)$ である。

- **$a/k \leq 1$ の場合**。このとき、すべての $y > 0$ に対して $g'(y) > g'(0) = k - a \geq 0$ であるから、g は $y \geq 0$ で狭義単調増加であり、最小値は $y = 0$ でとる。つまり、まったく備えをしないのがよい。このときの期待費用は $\frac{a}{\lambda}$ である。

これは納得のいく結果である。備えを 1 メートル増やすごとに確実に k の費用がかかり、節約できる a は洪水がその高さに達した場合にしか得られない。$a \leq k$ ならば、その節約が支出に見合うことは決してない。



小問 (ii)

定数 ky を加えても分散は変わらないので、$\mathrm{Var}(C) = a^2\,\mathrm{Var}(W)$ である。二次モーメント（second moment）については、同じ置換 $u = x - y$ により

$$\mathrm{E}(W^2) = \int_y^\infty (x-y)^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda y}\int_0^\infty u^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda y}\cdot\frac{2}{\lambda^2},$$

となる。パラメータ λ の指数分布に従う確率変数 U は $\mathrm{E}(U^2) = \mathrm{Var}(U) + \mathrm{E}(U)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}$ を満たすからである。よって、$p = \mathrm{e}^{-\lambda y}$ として、

$$\mathrm{Var}(C) = a^2\left(\frac{2p}{\lambda^2} - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) = \frac{a^2}{\lambda^2}\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\bigl(2 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\bigr).$$

前もって支出する額は ky であり、$k > 0$ であるから y とともに増加する。したがって、y が増加するにつれて $\mathrm{Var}(C)$ が減少することを示せばよい。微分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(2\mathrm{e}^{-\lambda y} - \mathrm{e}^{-2\lambda y}\right) = -2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} + 2\lambda \mathrm{e}^{-2\lambda y} = -2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\bigl(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\bigr),$$

となり、$y > 0$ のときは $0 < \mathrm{e}^{-\lambda y} < 1$ であるから、これは負である。よって $\mathrm{Var}(C)$ は $y \geq 0$ において y について狭義単調減少である。すなわち、備えに多く支出するほど費用の分散は小さくなり、証明が完了する。（同値な言い方をすれば、$p(2-p) = 1 - (1-p)^2$ は $[0,1]$ 上で p について増加し、$p = \mathrm{e}^{-\lambda y}$ は y について減少する。）

検算

- $y = 0$ のとき $C = aX$ であるから、$\mathrm{E}(C) = a/\lambda$、$\mathrm{Var}(C) = a^2/\lambda^2$ となり、いずれも公式と一致する。
- $y \to \infty$ のとき分散は 0 に近づく。非常に高い堤防を築けば不確実性は実質的になくなり、一定の費用 ky だけが残る。
- $k = 1$、$a = 3$、$\lambda = 0.5$、$y = 1.2$ のとき、公式からは $\mathrm{E}(C) \approx 4.493$、$\mathrm{Var}(C) \approx 28.67$ が得られる。100 万年分のコンピュータ・シミュレーションでは 4.496 と 28.68 が得られた。これらの値に対する最適な高さは $2\ln 3 \approx 2.197$ であり、コンピュータによる探索でも確かめられた。

よくある間違い

- $a(x-y)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$ を y からではなく 0 から積分してしまう。$X \leq y$ のときは洪水の被害はない。

- 境界 $y \geq 0$ を忘れ、$a < k$ で負になる場合にも $y = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{a}{k}$ を答えてしまう。
- 分散に ky を含めてしまう。これは定数であり、分散には何の寄与もしない。

STEP のその先へ

量 $\mathrm{E}\big(\max(X - y, 0)\big)$ は、行使価格（strike）y のコールオプション（call option）のペイオフそのものである。また最適条件 $\mathrm{P}(X > y) = k/a$ は、オペレーションズ・リサーチ（operations research）における古典的な「新聞売り子問題（newsvendor problem）」の規則である。すなわち、備えの限界費用（marginal cost）が期待される限界的な節約額に等しくなる水準を選べ、というものである。きれいな答えを支えている無記憶性は、連続分布（continuous distributions）の中では指数分布に特有の性質である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、指数分布や確率変数（random variables）の関数の期待値を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。