解答例

STEP II 2015、第 12 問

確率・統計 ・ 硬貨の表裏の列のゲーム

> **STEP II 2015、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q12

鍵となる考え方

ここで扱う列はどれも長さ 3 であるから、ある投げでゲームが終わるかどうかは、その投げとその直前の 2 回だけで決まる。したがって追跡すべきものは自然に**直近 2 回の結果**である。状態（state）は HH, HT, TH, TT の 4 つしかなく、それぞれの状態から次の 1 回でゲームが終わるか、別の状態へ移るかのどちらかである。勝者がただちに決まる状態もあり、残りの状態については次の 1 回の結果で条件付け（conditioning）して、簡単な連立方程式を立てればよい。

解答

以下を通して、各回の投げは独立（independent）であり、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で H または T が出るものとする。最初の 2 回でいずれかの列が完成することはないので、ゲームは必ず 4 つの 2 回分の状態のいずれかに達し、各状態の確率は $\frac{1}{4}$ である。また、ゲームは確率 1 で終わることにも注意しておく。どの局面からでも、続く 3 回で特定の列が完成する確率は $\frac{1}{8}$ であるから、ゲームがさらに $3n$ 回を超えて続く確率は高々 $(\frac{7}{8})^n \to 0$ である。

小問 (i)

ここでは HHT（A の列）と THH（B の列）だけが対象である。

最初の 2 回が HH の場合：しばらく H が出続け、最初に現れる T は少なくとも 2 つの H の後に来るので、HHT を完成させる。その T より前には裏が一度も出ていないので、THH は起こり得ない。よって A が勝つ。

最初の 2 回の中に T が現れる場合：その T の後で初めて表が 2 回連続する時点を考える。この HH の直前の投げは H ではあり得ない（もし H なら、その T の後にもっと早い HH があることになるか、あるいはその HH が最初の 2 回であることになるが、これは除外している）。よって直前は T であり、THH が完成している。HHT は HH を必要とし、この HH が最初のものであるから、HHT がそれより先に起こることはない。よって B が勝つ。

したがって、A が勝つのは最初の 2 回がともに表であるときに限り、

$$\mathrm{P}(A \text{ が勝つ}) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},$$

となり、示すべきことが示された。

小問 (ii)

今度は HHT, THH, TTH, HTT の 4 つの列すべてが有効である。最初の 2 回で条件付けする。

- **HH.** 小問 (i) と同様に、最初の T が出るまで H, H, ... と続き、その T が HHT を完成させる。他の列はいずれも「HH の後に H」という形を含まず、また THH, TTH, HTT を始める裏もまだ出ていない。よって A が勝つ。
- **TT.** H と T の役割を入れ替えた同じ議論により、最初の H が TTH を完成させるので、C が勝つ。
- **HT.** 次が T なら HTT となり D が勝つ。次が H なら直近 2 回は TH となる（HTH はどの列も完成させない）。
- **TH.** 次が H なら THH となり B が勝つ。次が T なら直近 2 回は HT となる（THT はどの列も完成させない）。

したがって、ゲームが状態 HT または TH に入ると、D か B が勝つまでこの 2 つの状態の間を行き来する。HT から始めたとき、TH から始めたときに D が勝つ確率をそれぞれ d_1, d_2 とする。次の 1 回で条件付けすると、

$$d_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}d_2, \qquad d_2 = \tfrac{1}{2}d_1.$$

代入すると $d_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}d_1$ であるから、$d_1 = \frac{2}{3}, d_2 = \frac{1}{3}$ となる。これらの状態からは B か D しか勝てないので、B が勝つ確率は HT からでは $\frac{1}{3}$、TH からでは $\frac{2}{3}$ である。したがって

$$\mathrm{P}(A) = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(C) = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(B) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{4}.$$

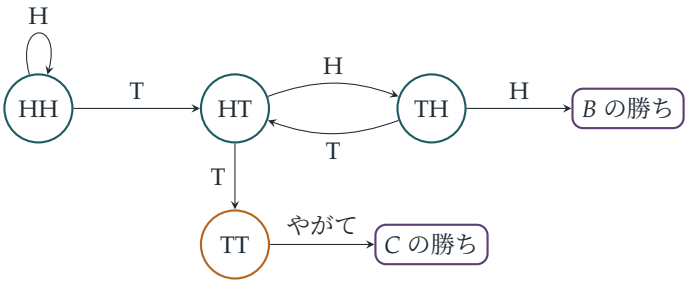
各プレイヤーが勝つ確率はいずれも $\frac{1}{4}$ である。

小問 (iii)

今度は THH（B の列）と TTH（C の列）だけが対象である。

最初の 2 回が TT の場合。その後は最初の H が出るまで T, T, ... と続き、その H が TTH を完成させる。THH には TH の後に H が必要であるが、H はまだ一度も出ていないので、B が先に勝つことはあり得ない。よって C が確率 1 で勝つ。

それ以外の始まり方については、ゲームが終わっていないという条件のもとで、状態（直近 2 回）がどう移るかを見るとわかりやすい。



（TT からは、次が T なら TT にとどまり、次が H なら TTH が完成する。このため TT を C の勝ちとして扱ってよい。）

HT, TH, HH から C が勝つ確率をそれぞれ p, q, r とする。

HT から。T が出れば TT となり、そこから C は確率 1 で勝つ。H が出れば HTH となり、どちらの列も完成せず状態 TH に移る。よって

$$p = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q,$$

となり、示すべきことが示された。

TH から。H が出れば THH が完成して B が勝つ。T が出れば THT となり、何も完成せず状態 HT に移る。よって $q = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p$ である。

> **考えてみよう** 直近 2 回の結果がわかれば、それ以前の経過が関係なくなるのはなぜか。

対象となる列はどちらも長さ 3 であるから、次の 1 回でゲームが終わるかどうかは、その 1 回と直前の 2 回だけで決まる。それより前の結果は無関係であり、今後の投げは過去と独立である。したがって、ある状態から C が勝つ確率は、その状態にどう到達したかによらず同じである。これにより、p の方程式の右辺に q が再び現れることが正当化される。

HH から。H が出れば HH にとどまり、T が出れば HT に移る。よって $r = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}p$ であり、$r = p$ を得る。

これを解く。$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p$ であるから、

$$p = \tfrac{2}{3}, \qquad q = \tfrac{1}{3}, \qquad r = \tfrac{2}{3}.$$

最後に、それぞれ確率 $\frac{1}{4}$ である最初の 2 回で条件付けすると、

$$\mathrm{P}(C \text{ が勝つ}) = \tfrac{1}{4}\,(1 + p + q + r) = \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

検算

- 小問 (ii) では 4 つの確率の和は 1 であり、答えは対称的である。H と T を入れ替えると $A \leftrightarrow C$ および $B \leftrightarrow D$ が入れ替わるので、$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(C)$ かつ $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(D)$ となるのは当然である。
- 小問 (iii) で $q = \frac{1}{3} < p$ となるのは納得がいく。TH からは、B はあと 1 回で勝てるからである。
- 各タイプのゲームを 200,000 回コンピュータでシミュレーションすると、小問 (i) では $\mathrm{P}(A) \approx 0.250$、小問 (ii) では 4 人とも 0.25 に近く、小問 (iii) では $\mathrm{P}(C) \approx 0.667$ となり、マルコフ連鎖に沿った厳密な計算と一致した。

よくある間違い

- 同じ長さの 2 つの列は、先に現れる確率が等しいはずだと思い込むこと。HHT と THH はそれぞれ単独では期待待ち時間（expected waiting time）が 8 回であるが、THH は 4 回に 3 回の割合で HHT に勝つ。
- 勝ちにつながらない投げでも有利な状態に移り得ることを忘れること。HT からの H は単なる「失敗」ではなく、TH へ移る投げである。
- HTH が TH から始めた場合と同じ局面になる理由を説明せずに $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q$ と書くこと。

STEP のその先へ

ここでの方法は**マルコフ連鎖**（Markov chains）への第一歩である。マルコフ連鎖とは、未来が現在の状態だけに依存する確率過程であり、吸収確率（absorption probabilities）に関する連立一次方程式を解くことで解析される。このゲームは Penney のゲーム（Penney's game）の一種である。このゲームでは、相手がどの 3 回分の列を選んでも、少なくとも確率 $\frac{2}{3}$ でそれに勝つ列を必ず選ぶことができる。したがって「どの

列が先に現れるか」という関係は推移的（transitive）ではない。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、マルコフ連鎖と吸収確率をちょうどこの水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。