解答例

STEP II 2015、第 11 問

力学 ・ 運動量とエネルギー

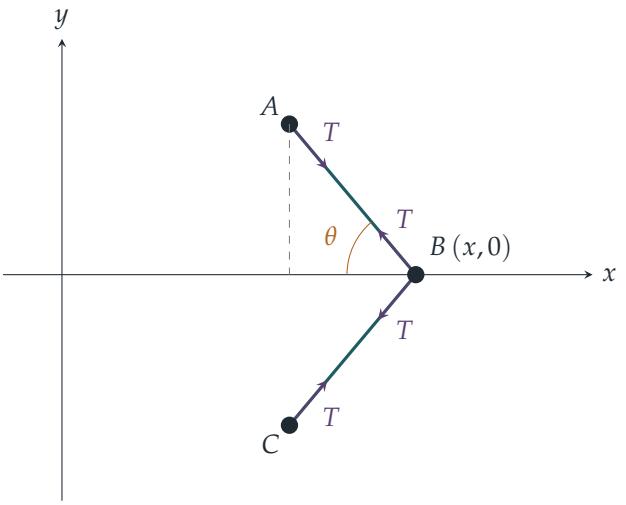
> **STEP II 2015、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q11

鍵となる考え方

運動は x 軸に関して対称なままなので、系全体は 2 つの座標 x と θ で記述できる。台はなめらかで、糸は軽く伸び縮みしないので、2 つの量、すなわち x 方向の運動量（momentum）と運動エネルギー（kinetic energy）が保存される。この 2 つの保存則（conservation law）から (ii) の 2 つの式が直ちに得られ、2 つ目の式を注意深く読むと、$\dot{\theta}$ が決してゼロにならないことがわかる。この事実ひとつで (iii) と (iv) がともに解決する。

解答

A、B、C を質点（particle）とみなし、糸は軽く伸び縮みしないものとしてモデル化する。重力と垂直抗力（normal reaction）はどちらも鉛直方向なので、水平方向の力は張力（tension）だけであり、これは系の内力である。



小問 (i)

A は、x 軸の負の向きと角 θ をなす直線上で、B から距離 a の位置にあるので、

$$A = (x - a\cos\theta,\ a\sin\theta).$$

$\cos\theta$ と $\sin\theta$ に合成関数の微分法（chain rule）を用いて t で微分すると、

$$\dot{\mathbf{r}}_A = (\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta},\ a\cos\theta\,\dot{\theta}),$$

となり、求める式が得られる（また $\dot{x} = v$ は B の速さである）。

設定も力積（impulse）も x 軸に関する鏡映について対称なので、運動は対称なままである。すなわち $C = (x - a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$ であり、その速度は $(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta},\ -a\cos\theta\,\dot{\theta})$ である。

小問 (ii)

まず初期値を求める。力積が加わった瞬間、2 本の糸はともに y 軸に沿っていて B の新しい速度に垂直なので、糸が A や C を急に引く必要はない。よってこれらは静止した状態から動き始め、一方で $\dot{x} = u$ である。x 方向の運動量の総和は mu、運動エネルギーは $\frac{1}{2}mu^2$ である。

運動量。水平方向の外力はないので、x 方向の運動量の総和は mu に等しいままである：

$$m\dot{x} + 2m(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta}) = mu \quad\Longrightarrow\quad 3\dot{x} + 2a\dot{\theta}\sin\theta = u. \tag{1}$$

（A と C の y 方向の運動量は、当然ながら打ち消し合う。）ここで右辺は B の初速 u である。問題用紙には v と印刷されているが、v はすでに $\dot{x}$ を表すのに使われているので、これは u の誤植に違いない。

エネルギー。糸は軽く伸び縮みしないので、張力は系全体として正味の仕事をせず、ほかの力も仕事をしない。したがって、A と C が衝突するまで運動エネルギーは保存される：

$$\dot{x}^2 + 2\left[(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta})^2 + a^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\right] = u^2. \tag{2}$$

$s = \sin\theta$、$c = \cos\theta$ とおくと、(1) より

$$\dot{x} = \tfrac{1}{3}(u - 2as\dot{\theta}), \qquad \dot{x} + as\dot{\theta} = \tfrac{1}{3}(u + as\dot{\theta}).$$

これを (2) に代入すると、交差項 $\mp 4uas\dot{\theta}$ が打ち消し合う：

$$\tfrac{1}{9}(u - 2as\dot{\theta})^2 + \tfrac{2}{9}(u + as\dot{\theta})^2 + 2a^2c^2\dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{9}(3u^2 + 6a^2s^2\dot{\theta}^2) + 2a^2c^2\dot{\theta}^2 = u^2.$$

よって $a^2\dot{\theta}^2(\frac{2}{3}s^2 + 2c^2) = \frac{2}{3}u^2$、すなわち $a^2\dot{\theta}^2(s^2 + 3c^2) = u^2$ である。$s^2 + 3c^2 = 3 - 2s^2$ であるから、

$$\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{a^2(3 - 2\sin^2\theta)},$$

となり、これが 2 つ目の結果である（ここでも v を u と読む）。

小問 (iii)

$3 - 2\sin^2\theta \le 3$ であるから、小問 (ii) より

$$\dot{\theta}^2 \ge \frac{u^2}{3a^2} > 0.$$

したがって $\dot{\theta}$ は決してゼロにならない。衝突と衝突の間ではこれは連続なので、符号は一定に保たれ、θ は単調に変化する。

最初 A は静止しているので、小問 (i) より $\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$、すなわち $\dot{\theta} = -u/a < 0$ である。よって θ は $\frac{\pi}{2}$ から一様に減少していく。A と C は常に同じ x 座標をもち、y 座標は $\pm a\sin\theta$ なので、両者が出会うのはちょうど $\sin\theta = 0$ のときである。1 回目の衝突は $\theta = 0$ のとき、B の後方で起こる。

考えてみよう 衝突によって $\dot{x}$ と $\dot{\theta}$ はどうなるか？

$\theta = 0$ では 2 本の糸はともに x 軸に沿っており、A と C は同じ x 方向の速度と、$\pm a\dot{\theta}$ という y 方向の速度をもつ。両者は y 方向に接近するので、両者の間に働く力積も y 方向である。これは糸に垂直なので、撃力的な張力は生じず、x 方向の速度はすべて変わらない。等しい質量どうしの弾性衝突（elastic collision）では、中心線方向の速度成分が交換される。よって A の y 方向の速度は $a\dot{\theta}$ から $-a\dot{\theta}$ に変わる。つまり衝突は単に $\dot{\theta}$ の符号を反転させるだけで、$\dot{x}$ は変わらない。

衝突の前後で運動量とエネルギーは変わらないので、(1) と (2)、したがって (ii) の 2 つの結果は、運動の次の段階でも成り立つ。今度は $\dot{\theta} > 0$ であり、先ほどと同様にゼ

ロにはなりえない。よって θ は 0 から一様に増加し、次に $\sin\theta = 0$ となる値は $\theta = \pi$ である。$\dot{\theta} \geq u/(a\sqrt{3})$ であるから、そこには有限時間、高々 $\pi a\sqrt{3}/u$ で到達する。2 回目の衝突は

$$\theta = \pi,$$

のときに起こり、A と C は B の**前方で**出会う。

小問 (iv)

運動全体を通して $\theta \in [0, \pi]$ なので、$\sin\theta \geq 0$ である。$v = \dot{x} = 0$ ならば、(1) より $2a\dot{\theta}\sin\theta = u$ であり、これを 2 乗して (ii) を用いると

$$4a^2\sin^2\theta \cdot \frac{u^2}{a^2(3 - 2\sin^2\theta)} = u^2 \iff 4\sin^2\theta = 3 - 2\sin^2\theta \iff \sin^2\theta = \tfrac{1}{2}.$$

よって候補となる値は $\theta = \frac{\pi}{4}$ と $\theta = \frac{3\pi}{4}$ である。

> **考えてみよう** 2 乗したことで符号の情報が失われた。実際に必要なのはどちらの符号か？

2 乗したのは $2a\dot{\theta}\sin\theta = u$ であり、$u > 0$ なので $\dot{\theta}\sin\theta > 0$、すなわち $\dot{\theta} > 0$ も必要である。$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ では $\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{2a^2}$ なので、$\dot{\theta} = \pm\frac{u}{a\sqrt{2}}$ であり、$2a\dot{\theta}\sin\theta = \pm u$ となる。(1) より：

- $\dot{\theta} > 0$ ならば $\dot{x} = \frac{1}{3}(u - u) = 0$ である。
- $\dot{\theta} < 0$ ならば $\dot{x} = \frac{1}{3}(u + u) = \frac{2}{3}u$ である。

したがって、答えは「いいえ」である。最初の振れ（θ が $\frac{\pi}{2}$ から 0 へ減少する間）では、θ は $v = \frac{2}{3}u$ の状態で $\frac{\pi}{4}$ を通過する。1 回目と 2 回目の衝突の間（θ が 0 から π へ増加する間）では、$\theta = \frac{\pi}{4}$ と $\theta = \frac{3\pi}{4}$ のどちらでも $v = 0$ となる。2 回目の衝突の後、$\dot{\theta}$ は再び負になるので、π から 0 へ戻る振れでは、どちらの値でも $v = \frac{2}{3}u$ となる。以後はこのパターンが繰り返される。すなわち、これらの角度で $v = 0$ となるのは、θ が増加する振れのときだけである。

検算

- 初期状態の $\theta = \frac{\pi}{2}$ では、(ii) より $\dot{\theta}^2 = u^2/a^2$ となり、A が静止していることから直接求めた $\dot{\theta} = -u/a$ と一致する。
- (1) より $\dot{x} = \frac{u}{3}\left(1 - \frac{2a\dot{\theta}\sin\theta}{u}\right)$ である。$\theta = 0$ ではこれは $\frac{u}{3}$ となり、3 つの質点はすべて $\frac{u}{3}$ で一緒に動く。これは重心（centre of mass）の速度であり、糸が x 軸に沿ってまっすぐ伸びているときには当然そうなるはずである。増加する振れの途中の

$\theta = \frac{\pi}{2}$ では $\dot{x} = -\frac{u}{3}$ となるので、B はしばらく後ろ向きに動く。これが、v が 0 を 2 回通過する理由である。

- 3 つの質点を非常に硬いばねでつないだ系を $a = u = 1$ としてコンピュータでシミュレーションすると、(ii) の 2 つの式がともに再現される。また、1 回目の衝突が $\theta = 0$、2 回目が $\theta = \pi$ で起こること、そして v の符号が変わるのは増加する振れの $\theta \approx 0.785$ と 2.356 の付近だけで、そこでは $\dot{\theta} \approx 0.707$ であることも示される。最初の振れでは、$\theta = \frac{\pi}{4}$ において $v \approx 0.67$ となる。

よくある間違い

- (1) の右辺を $\dot{x}$ としてしまう。右辺は力積によって定まる定数 u である。
- 衝突によって θ が $\frac{\pi}{2}$ に向かって戻り、2 回目の衝突も再び $\theta = 0$ で起こると考えてしまう。$\dot{\theta}$ が反転すると θ は $\frac{\pi}{2}$ を**通り越して**増加し、$\dot{\theta}^2$ は 0 から離れた値で下から抑えられているので、π に達する前に止まることはない。
- 小問 (iv) で、2 乗すると $\dot{\theta}$ の符号が失われることを忘れる。

STEP のその先へ

x と θ を座標に選び、それらを用いて運動エネルギーを組み立てることは、大学 1 年で学ぶラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点である。そこでは、x がエネルギーに現れない（つまり「循環座標」（ignorable coordinate）である）ため、x 方向の運動量の保存が自動的に導かれる。そしてここと同じく、エネルギーの式によって問題は θ に関する 1 つの 1 階微分方程式に帰着される。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、質点系に対する運動量とエネルギーの方法を非常に詳しく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。