解答例

STEP II 2015、第 10 問

力学 ・ 束縛運動

STEP II 2015、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

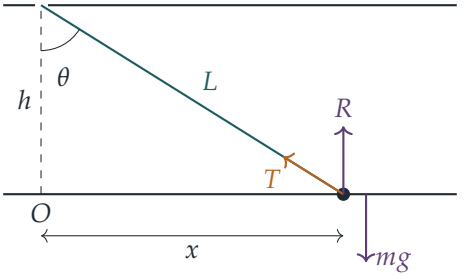
step.maths.org/questions/15-s2-q10

鍵となる考え方

これは拘束（constraint）の問題である。質点の運動は糸によって完全に決まってしまうので、まず運動学（kinematics）を扱い、力はその後で考える。天井より下にある糸の長さを、穴の真下の点から質点までの水平距離で表し、時間で微分する。この長さの変化率はわかっている。加速度が求まれば、水平方向のニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）から張力（tension）が得られる。また、鉛直方向の力のつり合いから垂直抗力（normal reaction）が得られる。質点が床の上にある間、垂直抗力は負になってはならない。

解答

質点はなめらかな水平な床の上の点とみなし、糸は軽く伸び縮みしない（inextensible）ものとする。したがって、張力 T は糸のどこでも等しい。床上で穴の真下にある点を O とし、O から質点までの距離を x、穴から質点までの糸の長さを L とする。



速さ

三平方の定理（Pythagorean theorem）と図の三角形から、

$$L^2 = x^2 + h^2, \qquad x = h\tan\theta, \qquad \sin\theta = \frac{x}{L}.$$

糸は穴から速さ V で引き込まれるので、$\dot{L} = -V$ である。$L^2 = x^2 + h^2$ を時間で微分すると（h は定数）、

$$2L\dot{L} = 2x\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \frac{L}{x}\dot{L} = -\frac{VL}{x} = -\frac{V}{\sin\theta}.$$

よって、質点は O に向かって速さ

$$\boxed{v = \frac{V}{\sin\theta} = V\operatorname{cosec}\theta}$$

で動く。これはつねに V より大きい（速さ V で動くのは糸であって、質点ではない）。

考えてみよう 質点の速さが単純に V や $V\sin\theta$ にならないのはなぜか。

糸が引き込まれる速さと等しくなければならないのは、質点の速度の**糸に沿った**成分だけである。糸は床と角 $\frac{\pi}{2} - \theta$ をなすので、この成分は $v\sin\theta$ である。$v\sin\theta = V$ とおくと上と同じ答えが得られ、$v > V$ となる理由もはっきりする。

加速度

$\dot{x} = -VL/x$ を、商の微分法（quotient rule）と $\dot{L} = -V$、$\dot{x} = -VL/x$ を用いてもう一度微分する。

$$\ddot{x} = -V\,\frac{\dot{L}\,x - L\,\dot{x}}{x^2} = -V\,\frac{-Vx + VL^2/x}{x^2} = -\frac{V^2(L^2 - x^2)}{x^3} = -\frac{V^2h^2}{x^3}.$$

$x = h\tan\theta$ を代入すると $\ddot{x} = -\dfrac{V^2}{h\tan^3\theta}$ となる。$\dot{x}$ と $\ddot{x}$ はともに負なので、質点は加速している。その加速度の大きさは

$$\boxed{a = \frac{V^2}{h\tan^3\theta} = \frac{V^2\cos^3\theta}{h\sin^3\theta}}$$

であり、向きは O の方向である。（検算として、θ が減少すると $v = V/\sin\theta$ は確かに増加する。）

張力と床からの離脱

質点にはたらく力は、重力 mg、床からの垂直抗力 R（床はなめらかなので鉛直方向）、および糸に沿った張力 T である。張力の水平成分は O に向かって $T\sin\theta$、鉛直成分は上向きに $T\cos\theta$ である。

水平方向について、ニュートンの運動の第 2 法則より

$$T\sin\theta = ma = \frac{mV^2}{h\tan^3\theta} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = \frac{mV^2}{h\sin\theta\tan^3\theta} = \frac{mV^2\cos^3\theta}{h\sin^4\theta}}$$

鉛直方向については、質点が床の上にある間はつり合っているので、

$$R + T\cos\theta = mg \quad \Longrightarrow \quad R = mg - \frac{mV^2\cos\theta}{h\sin\theta\tan^3\theta} = mg - \frac{mV^2}{h\tan^4\theta}.$$

考えてみよう 質点が引き寄せられるにつれて、R はどちら向きに変化するか。

質点が O に近づくと θ は減少するので、$\tan^4\theta$ が減少し、R は単調に減少する。最初（θ が大きいとき）は R は mg に近い。質点は $R \geq 0$ である限り床の上にとどまり、初めて $R = 0$ となる瞬間に床を離れる。それは

$$\frac{mV^2}{h\tan^4\theta} = mg \quad \Longleftrightarrow \quad \tan^4\theta = \frac{V^2}{gh},$$

のときであり、これが示すべきことであった。θ がこれより小さいと、式は $R < 0$ を与えるが、これはありえないので、質点は確かに床を離れている。

検算

- 次元（dimensions）：V^2/h は加速度、mV^2/h は力の次元をもち、$V^2/(gh)$ は無次元である。$\tan^4\theta$ が無次元であることと整合する。
- 極限：$\theta \to \frac{\pi}{2}$（質点が非常に遠い）のとき、糸はほぼ水平になり、予想どおり $v \to V$、$a \to 0$ となる。$\theta \to 0$ のときは速さと張力が発散するので、質点は O に達する前に床を離れなければならない。
- 数値：$V = 2$、$h = 1$、$\theta = \frac{\pi}{4}$ とすると、$v = 2\sqrt{2} \approx 2.83$、$a = 4$ となる。$x(t) = \sqrt{(L_0 - Vt)^2 - h^2}$ を数値的に微分しても同じ値が得られる。$g = 9.8$ とすると、質点が床を離れるのは $\theta \approx 38.6°$ のときである。

よくある間違い

- 質点の速さを $V/\sin\theta$ ではなく、V や $V\sin\theta$ としてしまう。
- $\dot{x} = -VL/x$ を 2 回目に微分するときに、L が変化することを忘れる。
- 糸が一定の速さで動くので張力も一定だと思い込む。質点は加速しているので、張力は一定ではない。

STEP のその先へ

ここでの質点の自由度（degree of freedom）は 1 つだけである。糸の運動が指定されれば、各時刻における質点の位置は決まってしまう。このような拘束をもつ問題は、大学の 1 年次または 2 年次で学ぶラグランジュ（Lagrange）力学（Lagrangian mechanics）で体系的に扱われる。そこでは拘束を座標の選び方に組み込み、R や T のような拘束力（constraint forces）は後から求める。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、この種の問題が数多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。