解答例

STEP II 2015、第 1 問

純粋数学 • 不等式と級数

> **STEP II 2015、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q1

鍵となる考え方

関数と対数（logarithm）の間の各不等式は、x にうまく選んだ値を代入すると、級数（series）の一つの項と対数の**差**との間の不等式になる。その差を足し合わせるとほとんどすべてが打ち消し合い（和が望遠鏡和（telescoping sum）になる）、対数が一つか二つだけ残る。腕の見せどころは、対数が差に分かれるような代入の選び方にある。

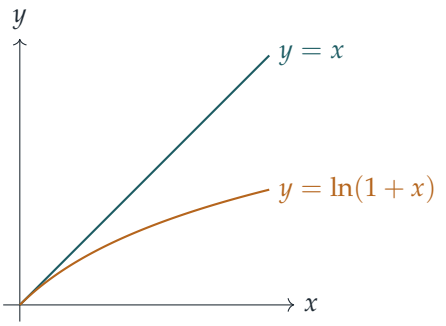
解答

小問 (i)

$x \geq 0$ に対して $f(x) = x - \ln(1+x)$ とおく。すると $f(0) = 0 - \ln 1 = 0$ であり、

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \qquad \text{ただし} x > 0.$$

よって f は $[0, \infty)$ で狭義単調増加（strictly increasing）であり、任意の $x > 0$ に対して $f(x) > f(0) = 0$ が成り立つ。すなわち、すべての正の x に対して $x > \ln(1+x)$ であり、これが示すべきことであった。



ここで正の整数 k に対して $x = \frac{1}{k}$ とおくと、

$$\frac{1}{k} > \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k.$$

これらを $k = 1, 2, \ldots, n$ について足し合わせると、右辺は打ち消し合う。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &> (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).\end{aligned}$$

これが求める結果である。（副産物として、$\ln(n+1) \to \infty$ であるから、調和級数（harmonic series）は発散（diverge）する。）

小問 (ii)

$0 \le x < 1$ に対して $g(x) = x + \ln(1-x)$ とおく。すると $g(0) = 0$ であり、

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0 \qquad \text{ただし} 0 < x < 1,$$

である。この範囲では $1 - x > 0$ だからである。よって g は狭義単調減少であり、$0 < x < 1$ に対して $g(x) < 0$ となる。すなわち

$$x < -\ln(1-x) \qquad (0 < x < 1).$$

考えてみよう x にどんな値を代入すべきか。また、なぜ $k = 1$ は使えないのか。

左辺に $\frac{1}{k^2}$ がほしいので、$x = \frac{1}{k^2}$ とおく。これには $x < 1$、すなわち $k \ge 2$ が必要である。$k = 1$ では対数 $\ln(1-1)$ が定義されない。項 $\frac{1}{1} = 1$ を別扱いにするのはこのためであり、これがちょうど上界 $1 + \ln 2$ の 1 にあたる。$k \ge 2$ については、$1 - \frac{1}{k^2}$ が因数分解できることが鍵となる。

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

したがって

$$\frac{1}{k^2} < -\ln\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = (\ln k - \ln(k-1)) - (\ln(k+1) - \ln k).$$

$a_k = \ln k - \ln(k-1)$ とおくと、右辺は $a_k - a_{k+1}$ である。$k = 2$ から N まで足し合わせると打ち消し合い、

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < a_2 - a_{N+1} = \ln 2 - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) < \ln 2,$$

となる。$\ln\frac{N+1}{N} > 0$ だからである。

よって部分和（partial sum）$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}$ は N とともに増加し、いずれも $1+\ln 2$ より小さい。上に有界（bounded above）な単調増加数列は収束（converge）するので、この無限級数は収束し、その和は $1+\ln 2$ 以下である。

不等式を厳密な（等号なしの）ものにするには、極限をとる操作では $\leq$ しか保たれないことに注意し、少し余裕を残しておく。$k = 2$ の不等式 $\frac{1}{4} < \ln\frac{4}{3}$ は等号なしで成り立つので、$\delta = \ln\frac{4}{3} - \frac{1}{4} > 0$ とおく。すると任意の $N \geq 2$ に対して、同じ打ち消し合いにより

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < \ln 2 - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \delta < \ln 2 - \delta,$$

が得られ、極限では $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq \ln 2 - \delta < \ln 2$ となる。$k = 1$ の項を加えて

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \ln 2,$$

これが求める結果である。

検算

- 小問 (i) で $n = 1$ のとき：$1 > \ln 2 \approx 0.693$。$n = 10$ のとき：$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k} \approx 2.929$ であり、一方 $\ln 11 \approx 2.398$ である。
- 小問 (ii)：真の和は $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$ であり、$1+\ln 2 \approx 1.6931$ を余裕をもって下回る。実際、上の議論からはやや精密な上界 $1+\ln 2-\delta \approx 1.6555$ が得られる（$\delta \approx 0.0377$）。
- $\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k^2}$ に対する打ち消し合いによる上界 $\ln 2 - \ln\frac{N+1}{N}$ は、10^5 までのすべての N についてコンピュータで確認した。

よくある間違い

- $k = 1$ についても $x = \frac{1}{k^2}$ を代入してしまう：このとき $\ln(1-x)$ は定義されず、最初の項を別扱いにし忘れると $1+\ln 2$ の 1 が抜け落ちる。

- $f(0) = 0$ を示さずに $f'(x) > 0$ だけを示す：関数は増加していても負であり得る。
- 等号なしの不等式の極限をとり、何の説明もなく極限でも等号なしだと主張する：極限からは $\leq$ しか得られない。

STEP のその先へ

和を対数（あるいは積分）と比較することは積分判定法（integral test）の出発点であり、小問 (i) を精密化すると、$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ がオイラー（Euler）の定数 $\gamma \approx 0.5772$ に収束することがわかる。厳密な値 $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ はオイラーによるバーゼル問題（Basel problem）の解であり、大学 1 年の講義ではフーリエ級数（Fourier series）から導くことが多い。ここで用いた単調収束（monotone convergence）の議論、すなわち有界な単調増加数列は収束するという事実は、実解析（real analysis）の礎石の一つである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）はこれを丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。