解答例

STEP I 2015、第 9 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP I 2015、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q9

鍵となる考え方

「最後に地面に着く」とは**着地時刻**（landing time）の話であって、発射時刻（firing time）の話ではない。後から低い角度で発射された弾丸は空中にいる時間が短いので、先に発射された弾丸より早く着地することがある。着地時刻を「発射時刻＋飛行時間（time of flight）」として表し、発射期間全体にわたってそれを最大化すればよい。変数として t の代わりに角度 α を用いると微分の計算がすっきりし、k に関する条件によって、最大値が停留点（stationary point）でとられるか端点でとられるかが決まる。

解答

設定

各弾丸を、空気抵抗（air resistance）のない状態で重力のみを受けて運動する質点（particle）とみなし、地面の高さから発射されるものとする。仰角（elevation）α で発射された弾丸の、発射から時間 s 後の鉛直方向の位置は $y = u\sin\alpha\, s - \frac{1}{2}gs^2$ であるから、この弾丸は

$$\frac{2u\sin\alpha}{g},$$

の時間の後に地面に戻り、その間に水平方向に

$$R(\alpha) = u\cos\alpha \cdot \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

だけ進む。仰角 α の弾丸は時刻 $t = (\frac{1}{3}\pi - \alpha)/\lambda$ に発射され、t が $[0, \frac{\pi}{6\lambda}]$ を動くとき、α は $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ の各値をちょうど一度ずつとる。したがって、この弾丸の着地時刻は

$$L(\alpha) = \frac{\frac{1}{3}\pi - \alpha}{\lambda} + \frac{2u\sin\alpha}{g}, \qquad \tfrac{1}{6}\pi \le \alpha \le \tfrac{1}{3}\pi.$$

である。最後に着地する弾丸は、L を最大にする弾丸である。$k = \dfrac{g}{2\lambda u}$ より $\dfrac{2u}{g} = \dfrac{1}{\lambda k}$ であるから、

$$L(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{3}\pi - \alpha + \frac{\sin\alpha}{k}\right), \qquad L'(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\cos\alpha}{k} - 1\right) = \frac{\cos\alpha - k}{\lambda k}.$$

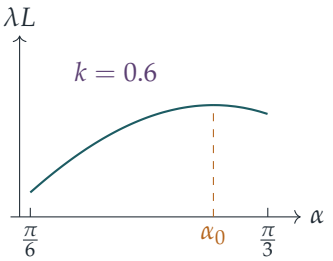
となる。よって L は $\cos\alpha > k$ となるところで増加し、$\cos\alpha < k$ となるところで減少する。いま考えている区間では、$\cos\alpha$ は $\frac{1}{2}\sqrt{3}$（$\alpha = \frac{1}{6}\pi$ のとき）から $\frac{1}{2}$（$\alpha = \frac{1}{3}\pi$ のとき）まで減少する。

考えてみよう なぜ α が大きいほど発射時刻が**早い**のか。また、そのことが L' の符号にとってなぜ重要なのか。

砲身は下がっていくので、角度の大きい弾丸ほど先に発射される。α を少し大きくすると、発射時刻は 1 ラジアンあたり $1/\lambda$ だけ早まるが、飛行時間は 1 ラジアンあたり $\frac{2u}{g}\cos\alpha$ だけ増える。$L'(\alpha)$ はこの二つの効果の差し引きであり、その符号がどちらの効果が勝つかを教えてくれる。

$\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{2}\sqrt{3}$ の場合

このとき k は $\cos\alpha$ のとりうる値の範囲にあるので、$\cos\alpha_0 = k$ を満たす $\alpha_0 \in [\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ がちょうど一つ存在する。区間上で cos は減少するから、$\alpha < \alpha_0$ では $\cos\alpha > k$、$\alpha > \alpha_0$ では $\cos\alpha < k$ である。よって L は α_0 まで増加し、その後減少するので、仰角 α_0 で発射された弾丸が最後に着地する。（$k = \frac{1}{2}$ または $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ のときは、α_0 は端点となり L は単調（monotonic）であるが、結論は同じである。）



（着地時刻の変化が見えるように、縦軸はずらしてある。）

$\sin\alpha_0 = \sqrt{1-k^2}$（$\alpha_0$ は鋭角（acute angle）なので正）を用いると、この弾丸の水平到達距離（range）は

$$R(\alpha_0) = \frac{2u^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{g} = \frac{2ku^2\sqrt{1-k^2}}{g},$$

であり、これが求める距離である。

$k < \frac{1}{2}$ の場合

このとき区間内のすべての α に対して $\cos\alpha \geq \frac{1}{2} > k$ であるから、区間全体で $L'(\alpha) > 0$ となり、L は狭義単調増加（strictly increasing）である。最大値は $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ でとられる。つまり、**最初に**発射された弾丸が最後に着地する。その水平到達距離は

$$R\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \frac{2u^2}{g} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}.$$

である。したがって $k < \frac{1}{2}$ のとき、最後の弾丸は砲から距離 $\dfrac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$ の地点に着地する。

（念のため述べておくと、$k > \frac{1}{2}\sqrt{3}$ のときは L は減少し、最後に発射された弾丸が最後に着地する。$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$ であるから、その距離はやはり $\frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$ である。）

検算

- 連続性（continuity）：$k = \frac{1}{2}$ のとき、最初の公式は $\dfrac{2 \cdot \frac{1}{2}u^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{g} = \dfrac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$ を与え、$k < \frac{1}{2}$ の場合の答えと一致する。$k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ のときも再び同じ値を与える。
- $u^2/g = 1$、$k = 0.6$ とすると、最後の弾丸は $\cos\alpha_0 = 0.6$ を満たし、距離 $2(0.6)(0.8) = 0.96$ の地点に着地する。発射時刻を 2 万個サンプリングし、その弾丸の運動を数値的に追跡するコンピュータによる検証でも、この結果と一致した。
- 次元：k は無次元量（dimensionless）である（g を、速さ毎時間の次元をもつ λu で割ったもの）。また u^2/g は長さの次元をもつ。

よくある間違い

- 着地時刻 $t + \frac{2u\sin\alpha}{g}$ ではなく、水平到達距離や飛行時間だけを最大化してしまう。
- 最後に発射された弾丸が最後に着地すると思い込む。
- α が増加すると t が減少することを忘れ、L' の符号を誤る。

STEP のその先へ

閉区間（closed interval）上で関数を最大化するには、内部の停留点と端点とを比較する必要があり、ここではパラメータによってどちらが勝つかが決まった。このような「どの制約が効いているか」の切り替わりは、制約付き最適化（constrained optimisation）の出発点であり、大学 1 年次の数理手法の講義で出会うことになる。この流儀の力学をさらに学びたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。