解答例

STEP I 2015、第 8 問

純粋数学 • べき乗和の整除性

> **STEP I 2015、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q8

鍵となる考え方

和を 2 回、一度は順に、一度は逆順に書いて足し合わせる。これは小問 (i) のためのガウス（Gauss）の工夫であり、各項が k 乗（k は奇数）であるときに小問 (ii) がまさに想定している方法でもある。r^k と $(n-r)^k$ を組にすると、$2S$ が n の倍数であることがわかる。r^k と $(n+1-r)^k$ を組にすると、$2S$ が $n+1$ の倍数でもあることがわかる。n と $n+1$ は共通の約数（factor）をもたないので、この 2 つの事実を組み合わせると $\frac{1}{2}n(n+1)$ で割り切れることが得られる。

解答

小問 (i)

$T = 1+2+\cdots+n$ とおく。和を逆順に書くと、

$$T = 1+2+\cdots+(n-1)+n,$$
$$T = n+(n-1)+\cdots+2+1.$$

縦に足すと、n 個の各列の和はいずれも $n+1$ であるから、$2T = n(n+1)$ となり、

$$1+2+\cdots+n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

小問 (ii)

N を法（modulo）として考えると、$N-m \equiv -m$ であるから、

$$(N-m)^k + m^k \equiv (-m)^k + m^k = -m^k + m^k = 0 \pmod{N},$$

ここで k が奇数であることから $(-m)^k = -m^k$ である。よって N は $(N-m)^k + m^k$ を割り切る。

合同式（congruence）を避けたい場合は次のようにすればよい。k が奇数のとき、因数分解

$$a^k + b^k = (a+b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 - \cdots + b^{k-1}),$$

が成り立つ（符号は交互に変わり、括弧の中には k 個の項があるので、最後の符号は $+$ である）。$a = N - m$、$b = m$ とおくと、$a + b = N$ に整数を掛けたものが得られる。ここでは $m \leq N$ である必要はまったくない。$m > N$ ならば $N - m$ は負になるが、それでも整数である。

n または $\frac{1}{2}n$ で割り切れること

k を奇数として $S = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ とおく。小問 (i) の工夫をまねる。$0^k = 0$ であるから、

$$S = \sum_{r=0}^{n} r^k = \sum_{r=0}^{n} (n-r)^k,$$

と書ける。2 つ目の形は同じ和を逆順に並べたものである。足し合わせると、

$$2S = \sum_{r=0}^{n} \Big[(n-r)^k + r^k \Big].$$

小問 (ii) で $N = n$、$m = r$ とすれば、各括弧は n で割り切れるので、n は $2S$ を割り切る。整数 M を用いて $2S = nM$ と書く。

- n が奇数ならば、n は $2S$ を割り切り、かつ 2 と共通の約数をもたないので、n は S を割り切る。
- n が偶数ならば、$\frac{1}{2}n$ は整数で $S = \frac{1}{2}n \cdot M$ であるから、$\frac{1}{2}n$ は S を割り切る。

考えてみよう n が偶数のとき、単に「n は S を割り切る」と言えないのはなぜか？

「$n \mid 2S$」から「$n \mid S$」を導くには、n が 2 と互いに素（coprime）である必要があるからである。実際、これは成り立たないことがある。$n = 2$、$k = 1$ とすると $S = 3$ となり、これは 2 の倍数ではない。n が偶数のときに言えるのは、n の半分が S を割り切るということだけである。

$1+2+\cdots+n$ で割り切れること

小問 (i) より、$\frac{1}{2}n(n+1) \mid S$ を示せばよい。項の組み方を変える。$1,2,\ldots,n$ を逆順にすると r は $n+1-r$ に移るので、

$$2S = \sum_{r=1}^{n}\left[(n+1-r)^k + r^k\right],$$

となり、小問 (ii) で $N = n+1$、$m = r$ とすれば、各括弧は $n+1$ で割り切れる。よって $n+1$ は $2S$ を割り切る。

さて、n と $n+1$ は連続する整数であるから、1 以外に共通の約数をもたない。したがって、n の任意の約数と $n+1$ の任意の約数についても同じことが成り立つ。ここで、互いに素な 2 つの整数がそれぞれ S を割り切るならば、その積も S を割り切るという事実を用いる。

- **n が奇数の場合。** $n \mid S$ はすでに示した。また $n+1$ は偶数で $n+1 \mid 2S$ であるから、$2S = (n+1)L$ と書くと $S = \frac{1}{2}(n+1)L$、すなわち $\frac{1}{2}(n+1) \mid S$ である。n と $\frac{1}{2}(n+1)$ は互いに素であるから、その積 $\frac{1}{2}n(n+1)$ は S を割り切る。
- **n が偶数の場合。** $\frac{1}{2}n \mid S$ はすでに示した。また $n+1$ は奇数で $2S$ を割り切るので、(2 と互いに素であるから) S を割り切る。$\frac{1}{2}n$ と $n+1$ は互いに素であるから、その積 $\frac{1}{2}n(n+1)$ は S を割り切る。

いずれの場合も、S は $\frac{1}{2}n(n+1) = 1+2+\cdots+n$ で割り切れる。これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** 約数どうしを掛けることで、2 つの割り切れる事実を 1 つにまとめてよいのはなぜか？

$\gcd(a,b) = 1$ のもとで $a \mid S$ かつ $b \mid S$ であるとし、$S = aq$ と書く。すると $b \mid aq$ であり、b は a と共通の素因数 (prime factor) をもたないので、b を割り切る素数べきはすべて q を割り切らなければならない。よって $b \mid q$ であり、$ab \mid S$ となる。互いに素でなければこれは成り立たない。たとえば $4 \mid 12$ かつ $6 \mid 12$ であるが、$24 \nmid 12$ である。だからこそ、n が偶数のときに n と $n+1$ を組にするのではなく、n と $\frac{1}{2}(n+1)$、あるいは $\frac{1}{2}n$ と $n+1$ を組にするよう注意したのである。

検算

$k = 3$、$n = 4$ の場合を試す。$S = 1+8+27+64 = 100$ であり、$1+2+3+4 = 10$ は 100 を割り切る。実は $1^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ であるから、$k = 3$ のときは結果は明らかである。$k = 5$、$n = 5$ の場合は $S = 1+32+243+1024+3125 = 4425 = 15 \times 295$

である。最終的な結果は、すべての $n \leq 119$ とすべての奇数 $k \leq 15$ についてコンピュータでも確かめられている。k が偶数のときは主張は成り立たない。$1^2 + 2^2 = 5$ は 3 で割り切れない。このことから、k が奇数であることが本当に使われていることがわかる。

よくある間違い

- n が偶数のときに、$n \mid 2S$ から $n \mid S$ を結論づけてしまう。
- 互いに素でない約数どうしを掛けてしまう。たとえば $n(n+1) \mid 2S$ を主張し、そのあと注意せずに半分にしてしまう。
- r^k と $(n-r)^k$ を組にするときに、$r = 0$（または $r = n$）の項を忘れる。$0^k = 0$ を含めることで、すべての項がきれいに組になる。

STEP のその先へ

べき乗和（power sum）$1^k + \cdots + n^k$ は n の $k+1$ 次の多項式であり、ベルヌーイ数（Bernoulli numbers）を用いたファウルハーバー（Faulhaber）の公式で与えられる。k が奇数のときは $\frac{1}{2}n(n+1)$ の多項式として書くことさえでき、これは今回の結果を別の角度から説明するものである。ここでの議論は、初等整数論（elementary number theory）の基本中の基本である合同式と互いに素であることを扱う、最初の手ほどきである。Davenport の *The Higher Arithmetic*（邦題『初等整数論講義』）はすばらしい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。