解答例

STEP I 2015、第 7 問

純粋数学 • 区間における最大値

STEP I 2015、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s1-q7

鍵となる考え方

閉区間（closed interval）上の滑らかな関数（smooth function）の最大値（greatest value）は、区間内部の停留点（stationary point）か端点（endpoint）のいずれかでとられる。ここでは停留点は $x = 0$ と $x = \frac{a}{3}$ であり、後者は a が大きくなるにつれて右へ移動し、やがて区間の外に出てしまう。そこで候補を列挙し、a を動かしながらそれらを比較する。三つの範囲は、比較の大小が入れ替わる点と、$\frac{a}{3}$ が $x = 1$ を越える点から生じる。

解答

候補

微分すると

$$f'(x) = 6ax - 18x^2 = 6x(a - 3x),$$

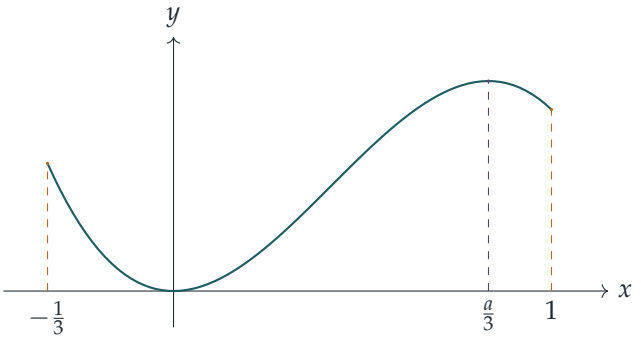
であるから、停留点は $x = 0$ と $x = \frac{a}{3}$ である。$a \geq 0$ のとき、f' の符号からグラフの形がわかる。

- $x < 0$ では $6x < 0$ かつ $a - 3x > 0$ であるから $f'(x) < 0$ となり、f は減少する。
- $0 < x < \frac{a}{3}$ では $f'(x) > 0$ であり、f は増加する。
- $x > \frac{a}{3}$ では $f'(x) < 0$ であり、f は減少する。

したがって $x = 0$ は極小（local minimum）、$x = \frac{a}{3}$ は極大（local maximum）である（$a = 0$ のときは両者が一致し、$f = -6x^3$ は全体で減少する）。必要な値は

$$f\left(-\tfrac{1}{3}\right) = \frac{a}{3} + \frac{2}{9}, \qquad f\left(\tfrac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{3} - \frac{2a^3}{9} = \frac{a^3}{9}, \qquad f(1) = 3a - 6.$$

である。f は $[-\frac{1}{3}, 0]$ で減少するから、この部分での最大値は $f(-\frac{1}{3})$ であり、値 $f(0) = 0$ が最大になることはない。よって $\mathrm{M}(a)$ は、$f(-\frac{1}{3})$ と $[0,1]$ 上での f の最大値のうち大きい方である。



この図は $a = \frac{5}{2}$ の場合である。三つの候補は二つの端点（琥珀色）と極大点（紫）であり、この場合は極大点が最大となる。

$0 \le a \le 3$ の場合

このとき $\frac{a}{3} \in [0,1]$ であるから、$[0,1]$ 上で関数は $x = \frac{a}{3}$ まで増加し、その後減少する。そこでの最大値は $f(\frac{a}{3}) = \frac{a^3}{9}$ であり、これを $f(-\frac{1}{3})$ と比較しなければならない。

$$\frac{a^3}{9} - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{a^3 - 3a - 2}{9} = \frac{(a+1)^2(a-2)}{9}.$$

考えてみよう $a^3 - 3a - 2$ の因数分解（factorisation）はどうすれば見つけられるか？

小さな整数を試してみる。$a = -1$ とすると $-1 + 3 - 2 = 0$、$a = 2$ とすると $8 - 6 - 2 = 0$ である。三つの根の和は 0 である（a^2 の項がない）から、三つ目の根も -1 であり、$(a+1)^2(a-2)$ が得られる。

$a \ge 0$ のとき $(a+1)^2 > 0$ であるから、差の符号は $a - 2$ の符号と一致する。したがって

$$\mathrm{M}(a) = \frac{a}{3} + \frac{2}{9} \quad \text{ただし} 0 \le a \le 2, \qquad \mathrm{M}(a) = \frac{a^3}{9} \quad \text{ただし} 2 \le a \le 3,$$

であり、$a = 2$ ではどちらの式も $\frac{8}{9}$ を与える。

$a > 3$ の場合

このとき $\frac{a}{3} > 1$ であるから、f は $[0,1]$ 全体で増加し、そこでの最大値は $f(1) = 3a - 6$ である。左端点と比較すると

$$(3a-6) - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{8a}{3} - \frac{56}{9} = \frac{8}{9}(3a-7),$$

となり、$a > 3 > \frac{7}{3}$ よりこれは正である。よって $a \geq 3$ のとき $\mathrm{M}(a) = 3a - 6$ である。$a = 3$ ではこれは $3 = \frac{27}{9}$ となり、中央の式と一致する。

結論

$$\mathrm{M}(a) = \begin{cases} \dfrac{a}{3} + \dfrac{2}{9}, & 0 \leq a \leq 2, \\ \dfrac{a^3}{9}, & 2 \leq a \leq 3, \\ 3a - 6, & a \geq 3. \end{cases}$$

言葉で言えば、a が小さいときは左端点が最大となり、a が中程度のときは極大値が最大となり、極大点が区間の外に出てしまうと右端点が最大となる。

検算

- M は連続（continuous）である。$a = 2$ では両側から $\frac{8}{9}$、$a = 3$ では両側から 3 となる。最大値は a に関して連続的に変化するのだから、こうなるはずである。
- $a = 0$：$f(x) = -6x^3$ は減少関数であるから、最大値は $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$ であり、第一の式と一致する。
- $a = \frac{5}{2}$：式からは $\frac{125}{72} \approx 1.736$ が得られ、一方、端点での値は $f(-\frac{1}{3}) \approx 1.056$ と $f(1) = 1.5$ であり、どちらも小さい。0 から 12 までの数百通りの a について、x の細かい格子上でコンピュータにより探索したところ、式と 10^{-8} 以内で一致した。

よくある間違い

- 左端点 $x = -\frac{1}{3}$ を忘れること。$x < 0$ で f は減少するので、この端点は極大値を上回ることがあり、実際 $a < 2$ のときはそうなる。
- $a > 3$ のときに $f(\frac{a}{3})$ を用いること。このとき $\frac{a}{3}$ は区間の外にあるので、候補にはならない。
- 極大値がそのまま区間上の最大値になると思い込むこと。

STEP のその先へ

ここで $\mathrm{M}(a) = \max_{x\in[-1/3,1]} f(x)$ は、関数族にわたる最適化によって定義される関数である。このような関数は一般に連続ではあるが、区分的に滑らか（piecewise smooth）であるにすぎない。実際、$a = 2$ で M の左微分係数と右微分係数（left and right derivatives）が一致しないことを確かめてみるとよい。そもそも有界閉区間上の連続関数が最大値をとるということは最大値定理（Extreme Value Theorem）であり、大学の解析学（analysis）の最初の講義で証明される。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門の教科書）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。