解答例

STEP I 2015、第 6 問

純粋数学 • 幾何におけるベクトル

STEP I 2015、問 6

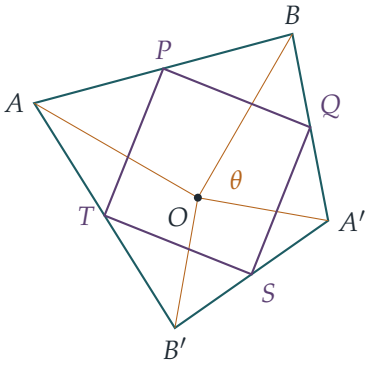
先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s1-q6

鍵となる考え方

O を原点とすると、条件 $OA = OB$ と $\angle AOB = 90°$ は、B が A を O のまわりに直角だけ回転（rotation）した点であることを意味する。同様に、B' は A' を同じ向きに回転した点である。この四分の一回転を R と書く。すると、中点四角形の各辺は、直前の辺に R を施したものになることがわかり、これこそが正方形になる理由である。辺を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}'$ で表せれば、面積は余弦定理（cosine rule）の計算に帰着する。

解答



中点は正方形をなす

O を原点とし、A, B, A', B' の位置ベクトル（position vector）を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$ とする。R を O のまわりの時計回りの 90° 回転とする。R は線形（linear）であり、長さを保ち、

零でないすべてのベクトルを直角だけ回転させる。

頂点は時計回りに並び、O は四角形の内部にあるので、OA から OB へは時計回りに 90° 回転することになる。$OA = OB$ であるから、$\mathbf{b} = R\mathbf{a}$ が成り立つ。同様にして $\mathbf{b}' = R\mathbf{a}'$ である。

P, Q, S, T をそれぞれ AB、BA'、$A'B'$、$B'A$ の中点（midpoint）とする。

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{a}'), \quad \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}'+\mathbf{b}'), \quad \mathbf{t} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}'+\mathbf{a}).$$

4 つの辺を順に調べる。$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}'-\mathbf{a}) = \mathbf{u},\\
\overrightarrow{QS} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}'-\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}R(\mathbf{a}'-\mathbf{a}) = R\mathbf{u},\\
\overrightarrow{ST} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{a}') = -\mathbf{u},\\
\overrightarrow{TP} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{b}') = -R\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

ここで $A \neq A'$ であるから $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ である。よって PQ と ST は大きさが等しく向きが逆であり、$PQST$ は平行四辺形（parallelogram）である。その隣り合う辺 QS は、$\mathbf{u}$ を長さを変えずに直角だけ回転させたものである。隣り合う辺が等しくかつ垂直な平行四辺形は正方形であるから、$PQST$ は正方形である。これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** A を B に移す四分の一回転が、A' を B' に移す四分の一回転と同じでなければならないのはなぜか。

どちらの組も時計回りの頂点の並びで連続しており、O は内部にあるので、いずれの場合も 1 本目の半直線から 2 本目への回転は時計回りである。もし一方が時計回りで他方が反時計回りであれば、$\overrightarrow{QS}$ から $R\mathbf{u}$ を導く段階が成り立たなくなり、一般にはこの図形は正方形にならない。

面積の最大化

$OA = OB = p$、$OA' = OB' = q$ とし、どちらも固定する。また $\theta = \angle BOA'$ とおく。O における 4 つの角の和は 360° であり、そのうち 2 つは直角であるから、$\angle B'OA = 180^\circ - \theta$ である。O は内部にあるので、θ と $180^\circ - \theta$ はともに 0° より大きく 180° より小さい。したがって $0 < \theta < 180^\circ$ である。

正方形の 1 辺は $|\mathbf{u}| = \frac{1}{2}AA'$ であるから、その面積は $\frac{1}{4}AA'^2$ である。OA から OB を経て OA' まで回転すると考えれば、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}'$ のなす角は $90^\circ + \theta$ であり、$\cos(90^\circ+\theta) = -\sin\theta$ である。余弦定理により（あるいは $|\mathbf{a}'-\mathbf{a}|^2$ を展開して）、

$$AA'^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos(90^\circ+\theta) = p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta,$$

となるので、

$$\text{面積} = \tfrac{1}{4}\left(p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta\right).$$

p と q を固定すると、これは $\sin\theta$ が最大のときに最大となる。$0 < \theta < 180^\circ$ においてそれが起こるのは、ちょうど

$$\angle BOA' = \theta = 90^\circ,$$

のときであり、最大面積は $\frac{1}{4}(p+q)^2$ である。このとき O における 4 つの角はすべて直角となるので、A' は AO を O の先へ延長した直線上にあり、正方形の 1 辺は $\frac{1}{2}(p+q)$ である。

検算

- $p = 2$、$q = 3$ とする。面積の式は $\frac{1}{4}(13 + 12\sin\theta)$ となり、$\theta = 0$ の近くで 3.25、$\theta = 90^\circ$ で $6.25 = \frac{1}{4}\cdot 5^2$ まで増加し、再び 3.25 に向かって減少する。コンピュータで θ を細かく走査すると、最大値は 90.0° でとられる。
- 対称な場合 $p = q$、$\theta = 90^\circ$：$ABA'B'$ 自体が O を中心とする 1 辺 $p\sqrt{2}$ の正方形となり、その中点正方形は 1 辺 p、面積 $p^2 = \frac{1}{4}(2p)^2$ であって、式と一致する。
- p、q、θ を無作為に選んだ場合について、中点が面積 $\frac{1}{4}(p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta)$ の正方形をなすことをコンピュータで確認した。

よくある間違い

- OA と OA' のなす角を $90^\circ + \theta$ ではなく θ としてしまう。すると面積が $\frac{1}{4}(p^2 + q^2 - 2pq\cos\theta)$ となり、θ を 180° に近づけるべきだという誤った結論に至る。
- 4 つの辺が等しいことだけを示す。それではひし形（rhombus）であることしかわからない。直角であることも必要であり、ここではそれが $\overrightarrow{QS} = R\,\overrightarrow{PQ}$ から自動的に得られる。

STEP のその先へ

直角の回転は線形写像 $R(x, y) = (y, -x)$ であり、複素平面（complex plane）では $-\mathrm{i}$ を掛けることにあたる。議論全体は線形写像を用いた計算である。R は引き算と可換（commute）であるから、$\mathbf{q} - \mathbf{p}$ と $\mathbf{s} - \mathbf{q}$ は R だけ異なる。同じ考え方で、ナポレオン（Napoleon）の定理やファン・アウベル（van Aubel）の定理などの結果を手早く証明できる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、まさにこの方法で、複素数の掛け算を通して幾何学を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。