解答例

STEP I 2015、第 5 問

純粋数学 ・ パラメータを含む積分

> **STEP I 2015、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q5

鍵となる考え方

どちらの積分も、x をパラメータとして固定すれば、t についての初等的な原始関数（antiderivative）をもつ。したがって「積分を計算することにより」という指示がヒントのすべてである。すなわち、x の閉じた式を求め、それを図示すればよい。注意すべきは細部である。(i) では被積分関数（integrand）が $t = 1$ で有界でなくなることがあり、(ii) では平方根が**絶対値**（absolute value）になる。そのため g は区分的（piecewise）に定義された関数となり、その形は意外なほど単純である。

解答

小問 (i)

$x > 0$ を固定すると、$(t-1)^{x-1}$ の原始関数の一つは $\frac{1}{x}(t-1)^x$ である。よって

$$f(x) = \left[\frac{(t-1)^x}{x}\right]_1^3 = \frac{2^x - 0}{x} = \frac{2^x}{x}.$$

$0 < x < 1$ のとき、被積分関数 $(t-1)^{x-1}$ は $t \to 1^+$ で発散するので、この積分は広義積分（improper integral）である。しかし $x > 0$ であるから $t \to 1^+$ のとき $(t-1)^x \to 0$ となり、積分は収束し、上の値はそのまま成り立つ。

次に、$x > 0$ において $y = 2^x/x$ を図示する。

- $x \to 0^+$ のとき $2^x \to 1$ であるから $f(x) \to +\infty$ となる。すなわち y 軸が漸近線（asymptote）である。
- $x \to \infty$ のとき、指数関数はべき関数より速く増加するので $f(x) \to \infty$ となる（しかもどんな直線よりも速い）。

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^x = 2^x \ln 2$ を用いて微分すると

$$f'(x) = \frac{2^x \ln 2 \cdot x - 2^x}{x^2} = \frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{x^2},$$

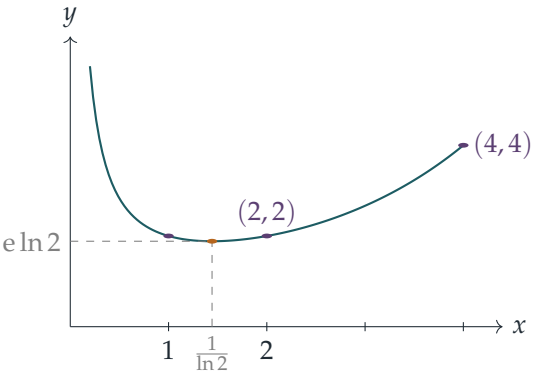
となり、これは $x < 1/\ln 2$ で負、$x > 1/\ln 2$ で正である。したがって停留点（stationary point）はただ一つで、それは $x = 1/\ln 2 \approx 1.44$ における極小点である。

- このとき $2^{1/\ln 2} = \mathrm{e}^{(\ln 2)/\ln 2} = \mathrm{e}$ であるから、最小値は

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \mathrm{e} \ln 2 \approx 1.88.$$

- 役に立つ点：$f(1) = f(2) = 2$、$f(4) = 4$。

この曲線は凸（convex）でもある。実際、$\ln f(x) = x \ln 2 - \ln x$ は凸であり（その第 2 次導関数は $1/x^2 > 0$）、凸関数の指数関数は凸である。よって、グラフは一つの U 字形の曲線となる。



小問 (ii)

まず、被積分関数が意味をもつことを確かめる。$-1 \le t \le 1$ のとき

$$1 - 2xt + x^2 \ge 1 - 2|x| + x^2 = (1 - |x|)^2 \ge 0,$$

であり、等号が成り立つのは $|x| = 1$ かつ $t = \pm 1$（端点）のときに限る。この場合については後で改めて扱う。

$x = 0$ のとき被積分関数は 1 であるから $g(0) = 2$ である。$x \neq 0$ のときは x を定数とみなす。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 - 2xt + x^2) = -2x$ であるから、原始関数の一つは $-\frac{1}{x}\sqrt{1 - 2xt + x^2}$ である。よって

$$g(x) = -\frac{1}{x}\left[\sqrt{1 - 2xt + x^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{(1+x)^2} - \sqrt{(1-x)^2}}{x} = \frac{|1+x| - |1-x|}{x}.$$

考えてみよう なぜ単純に $\sqrt{(1+x)^2}=1+x$、$\sqrt{(1-x)^2}=1-x$ と書いてはいけないのだろうか？

それは $\sqrt{u^2}=|u|$ であって、u ではないからである。不注意に計算すると、すべての x に対して $g(x)=2$ となってしまうが、これは $|x|$ が大きいときには明らかに誤りである。そのとき被積分関数はおよそ $1/|x|$ であり、したがって $g(x)\approx 2/|x|$ となるはずだからである。場合分けをしなければならない。

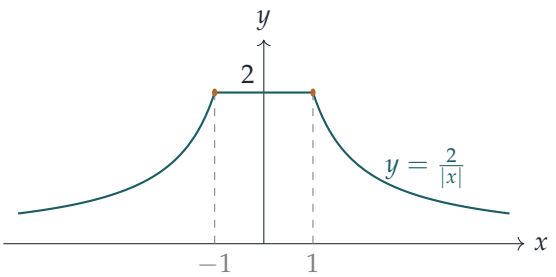
- $-1\le x\le 1$、$x\neq 0$ のとき：$1+x$ と $1-x$ はともに ≥ 0 であるから $g(x)=\dfrac{(1+x)-(1-x)}{x}=2$。これは $g(0)=2$ とも一致する。
- $x>1$ のとき：$|1+x|=1+x$、$|1-x|=x-1$ であるから $g(x)=\dfrac{2}{x}$。
- $x<-1$ のとき：$|1+x|=-1-x$、$|1-x|=1-x$ であるから $g(x)=\dfrac{-2}{x}=\dfrac{2}{|x|}$。

$x=\pm 1$ のとき、被積分関数は一方の端点で有界でなくなる（$x=1$ のときは $1/\sqrt{2-2t}$ となり、$t\to 1$ で発散する）ので、この積分は広義積分である。原始関数 $-\sqrt{2-2t}$ は $t=1$ まで連続であるから積分は収束し、上の式からやはり $g(\pm 1)=2$ が得られる。

以上より

$$g(x)=\begin{cases}2, & |x|\le 1,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|\ge 1.\end{cases}$$

この関数は偶関数（even function）である（当然そうなるはずである。t を $-t$ に置き換えると $g(-x)=g(x)$ がわかる）。また、いたるところ連続で、$[-1,1]$ 上では定数であり、$2/|x|$ のように減衰して漸近線 $y=0$ に近づく。$x=\pm 1$ では角ができる。片側からの傾きは 0（内側）と ∓ 2（外側）であるから、g はそこで微分可能（differentiable）ではない。



検算

- 小問 (i) で $x = 1$ のとき：被積分関数は 1 であるから $f(1) = 2$ となり、$2^1/1$ と一致する。$x = 2$ のとき積分は $\int_1^3 (t-1)\,\mathrm{d}t = 2$ であり、$2^2/2$ と一致する。
- 小問 (ii) で $x = 0$ のとき：被積分関数は 1 で、$g(0) = 2$ である。$|x|$ が大きいとき、被積分関数は長さ 2 の区間全体で $1/|x|$ に近く、$2/|x|$ と一致する。
- 数値的には $\int_1^3 (t-1)^{0.5}\,\mathrm{d}t = 1.8856\ldots = 2^{1.5}/1.5$ である。(ii) の積分は $x = 1.2$ のとき $1.6667 = 2/1.2$、$x = 0.8$ のとき 2.0000 となる。

よくある間違い

- すべての x に対して $\sqrt{(1-x)^2} = 1 - x$ と書き、g が定数であると結論してしまう。
- (i) の積分が $0 < x < 1$ のとき広義積分であることを忘れる。あるいは、$(t-1)^x$ が $t = 1$ で 0 になるのは $x > 0$ だからこそであることを忘れる。
- $x = \pm 1$ で g のグラフを滑らかに描いてしまう。二つの部分は異なる傾きで接続している。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、姿を変えたニュートン（Newton）の殻定理（shell theorem）である。$t = \cos\theta$ とおくと、$1/\sqrt{1 - 2xt + x^2}$ という量は、単位球の中心から距離 x にある点と球面上の点との距離の逆数である。したがって g は（定数倍を除いて）一様な球殻による重力ポテンシャルであり、内部では定数、外部では点質量によるポテンシャルに等しい。同じ式はルジャンドル（Legendre）多項式（Legendre polynomials）の母関数（generating function）$\sum_n P_n(t)x^n$ でもあり、$|x| < 1$ で $g(x) = 2$ となることは、$n \geq 1$ のすべての P_n の $[-1, 1]$ 上の積分が 0 であるという事実を反映している。小問 (i) の、x をパラメータとして t^{x-1} を積分する操作は、ガンマ関数（Gamma function）とベータ関数（Beta function）への第一歩である。Mary Boas の *Mathematical Methods in the Physical Sciences*（物理科学のための数学的方法）は、ルジャンドル多項式とガンマ関数をちょうどよい水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。