解答例

STEP I 2015、第 4 問

純粋数学 • 媒介変数表示された曲線と面積

> **STEP I 2015、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q4

鍵となる考え方

曲線の傾き（gradient）をパラメータとして用いる。中点における接線（tangent）が x 軸となす角を θ とすると、そこでの傾きは $\tan\theta$ であり、これにより中点が定まる。各端点は、中点から単位ベクトル（unit vector）$(\cos\theta, \sin\theta)$ の方向に距離 b だけ離れた点である。面積については、半分の棒 AP が P における接線上にあるので、領域は放物線（parabola）とその接線の一本に挟まれた部分にすぎず、その被積分関数（integrand）は完全平方式（perfect square）になる。

解答

端点の軌跡

中点を P とし、棒が x 軸の正の向きとなす角を θ とする。$y = \frac{1}{4}x^2$ では $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}x$ であり、棒は P において曲線に接するから、

$$\tfrac{1}{2}x_P = \tan\theta, \qquad \text{よって} \qquad P = (2\tan\theta,\ \tan^2\theta).$$

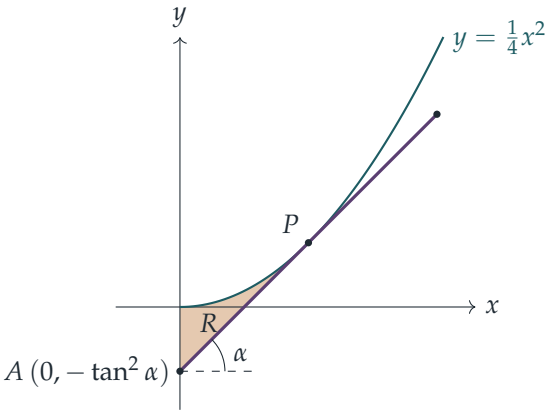
条件 $x \geq 0$ より $\tan\theta \geq 0$ であるから、$0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$ としてよい。θ がこの範囲を動くとき、$2\tan\theta$ は $[0, \infty)$ のすべての値をとるので、中点のどの位置もただ一つの θ から得られる。

棒の方向の単位ベクトルは $(\cos\theta, \sin\theta)$ であり、各端点は P から距離 b にある。したがって端点は $P \pm b(\cos\theta, \sin\theta)$ である。負号をとると（下側、左側の端点）、

$$x = 2\tan\theta - b\cos\theta,$$
$$y = \tan^2\theta - b\sin\theta,$$

となり、求める式が得られた。（もう一方の端点は、$-b$ を $+b$ に置き換えた同じ式で表される曲線を描く。）

R の面積



y 軸に達する端点は $x = 2\tan\theta - b\cos\theta$ のほうである。もう一方の端点は常に $x = 2\tan\theta + b\cos\theta > 0$ だからである。よって $\theta = \alpha$ のとき、

$$2\tan\alpha = b\cos\alpha.$$

A の y 座標は $\tan^2\alpha - b\sin\alpha$ であり、直前の式を使って b を消去できる：

$$b\sin\alpha = (b\cos\alpha)\tan\alpha = 2\tan^2\alpha, \qquad \text{よって} \qquad A = (0, -\tan^2\alpha).$$

考えてみよう A は原点に対してどこにあるか。また、直線 AP の方程式は何か。

A は原点の下にあり、直線 AP は P における放物線の接線である。$t = \tan\alpha$ とおく。$P = (2t, t^2)$ における接線の傾きは t であるから、その方程式は

$$y = t^2 + t(x - 2t) = tx - t^2,$$

であり、確かに $A = (0, -t^2)$ を通る。放物線はこの接線より上にある。実際、

$$\tfrac{1}{4}x^2 - (tx - t^2) = (\tfrac{1}{2}x - t)^2 \geq 0.$$

したがって R は、$0 \leq x \leq 2t$ で、直線 AP（下側）と曲線（上側）の間にある点全体の集合である。その左端は、y 軸上の A から O までの線分である。ゆえに

$$\text{面積}R = \int_0^{2t} \left(\tfrac{1}{4}x^2 - (tx - t^2)\right)\mathrm{d}x = \int_0^{2t} (\tfrac{1}{2}x - t)^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}x - t)^3\right]_0^{2t} = 0 - \tfrac{2}{3}(-t)^3 = \tfrac{2}{3}t^3.$$

よって R の面積は $\frac{2}{3}\tan^3\alpha$ であり、求める結果が得られた。

b が完全に消えていることに注意しよう。面積は、P における接線が y 軸と交わる位置だけで決まるのである。もちろん b と α は $2\sin\alpha = b\cos^2\alpha$ で結ばれているので、b によって α は定まる。

検算

- $\alpha = \frac{1}{4}\pi$（図の場合）とする。このとき $b\cos\alpha = 2$ より $b = 2\sqrt{2}$ であり、$P = (2,1)$、$A = (0,-1)$ となる。面積は $\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - 2 + 2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\tan^3\frac{1}{4}\pi$ である。
- $b = 2$ のとき、$2\tan\alpha = 2\cos\alpha$ を数値的に解くと $\alpha \approx 0.6662$ となり、数値積分（numerical integration）で求めた面積は 0.32391 で、$\frac{2}{3}\tan^3\alpha$ と一致する。
- $b \to 0$ のとき $\alpha \to 0$ となり、公式が示すとおり領域は縮んで消える。

よくある間違い

- 領域を x 軸で分割し、その下にある三角形を忘れること。接線と曲線の間の一つの積分で、両方の部分をまとめて扱える。
- 棒の端点を取り違えること。$+b\cos\theta$ をもつ端点は決して y 軸に達しない。
- $b\cos\alpha = 2\tan\alpha$ を使って b を消去せず、答えに b を残すこと。

STEP のその先へ

中点は放物線を描き、各端点は接線に沿って一定の距離 b にある曲線を描く。元の曲線の接線から新しい曲線を作ることは、平面曲線の微分幾何学（differential geometry）の標準的なテーマであり（伸開線（involute）、包絡線（envelope）、追跡線（tractrix）が古典的な例である）、大学 1 年次の講義で弧長（arc length）や曲率（curvature）とともに学ぶ。面積が簡潔な値になることは、アルキメデス（Archimedes）による放物線の求積（quadrature）を思い起こさせる。それは、放物線の弓形（parabolic segment）の面積が、ある内接三角形の面積の $\frac{4}{3}$ 倍であることを示すものである。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* に挑戦するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。