解答例

STEP I 2015、第 3 問

純粋数学 • 座標幾何と可視性

STEP I 2015、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

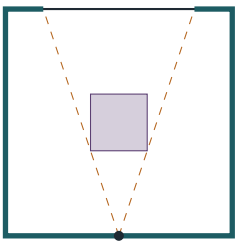
step.maths.org/questions/15-s1-q3

鍵となる考え方

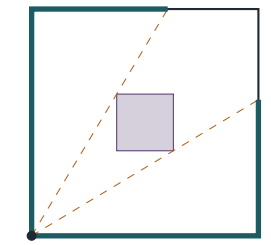
警備員の視線は建物によってさえぎられる。建物は凸（convex）な正方形なので、その角の一つをかすめる直線が、壁の見える部分の終わる位置を決める。そこで、各位置についてこのかすめる直線を引き、それが外周と交わる点を求めて、見える長さを足し合わせればよい。計算はすべて相似な三角形（similar triangles）（あるいは直線の方程式）で済む。数 $3a$ は、壁の中点から引いたかすめる直線がちょうど中庭の隅に達するときの b の値として現れる。

解答

原点を中心にとる。すると外周の壁は辺が $x = \pm\frac{b}{2}, y = \pm\frac{b}{2}$ 上にある正方形であり、建物は正方形 $|x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2}$ である。ただし $0 < a < b$ とする。外周（perimeter）の全長は $4b$ である。警備員が壁上の点 Q を見ることができるのは、警備員から Q への線分（segment）が建物を通らないとき、かつそのときに限る。



壁の中点（$b > 3a$）



隅

壁の太線（ティール色）の部分が警備員から見える部分であり、破線は建物の角をかすめる直線である。

壁の中点にいる警備員

警備員が下側の壁の中点 $G = (0, -\frac{b}{2})$ にいるとする。建物は下側の壁より真に上にあるので、下側の壁全体が見え、その長さは b である。y 軸に関する対称性（symmetry）により、右側だけを調べればよい。

右上に向かう視線が建物に当たらないのは、それが最も近い角 $K = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ の右側を通るとき、かつそのときに限る。（この直線はまず $y = -\frac{a}{2}$ と交わり、上に進むにつれて x 座標が増加する。したがって高さ $-\frac{a}{2}$ で建物の右側にあれば、その後も右側にとどまる。一方、そこで K の左側にあれば、高さ $-\frac{a}{2}$ での x 座標は 0 と $\frac{a}{2}$ の間にあるから、建物の中に入ってしまう。）よって G から見える範囲の境界は直線 GK である。この直線は水平距離 $\frac{a}{2}$ の間に $\frac{b-a}{2}$ だけ上昇するので、傾き（gradient）は $\frac{b-a}{a}$ である。

この直線は右側の壁 $x = \frac{b}{2}$ と高さ

$$y_1 = -\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{b-a}{a} = -\frac{b}{2} + \frac{b(b-a)}{2a}.$$

で交わる。これがその壁の上端に達する（$y_1 \geq \frac{b}{2}$）のは $\frac{b-a}{a} \geq 2$、すなわち $b \geq 3a$ のとき、かつそのときに限る。

考えてみよう なぜここで b と $3a$ の大小比較が出てくるのだろうか？

それは、かすめる直線 GK がどの壁に当たるかを決めるからである。$b < 3a$ ならば右側の壁に、$b > 3a$ ならば向かい側（上側）の壁に当たる。二つの場合で、見える長さの式は異なる。

場合 $b < 3a$。 警備員には右側の壁が下端の隅から高さ y_1 まで見え、その長さは

$$y_1 + \frac{b}{2} = \frac{b(b-a)}{2a},$$

である。それより先は見えない（その壁のより高い点や上側の壁へ向かう直線は、すべて K の左側を通る）。左側の対応する部分を合わせると、見える長さの合計は

$$M = b + 2 \cdot \frac{b(b-a)}{2a} = b + \frac{b(b-a)}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

である。

場合 $b > 3a$。 このとき右側の壁全体（長さ b）が見える。直線 GK は b だけ上昇したところで上側の壁 $y = \frac{b}{2}$ と交わるから、その交点は

$$x = \frac{a}{b-a} \cdot b = \frac{ab}{b-a},$$

であり、$2a < b - a$ なのでこれは $\frac{b}{2}$ より小さい。警備員には上側の壁がそこから隅まで見え、その長さは $\frac{b}{2} - \frac{ab}{b-a} = \frac{b(b-3a)}{2(b-a)}$ である。下側の壁、両側の壁、上側の壁の二つの部分を足し合わせると

$$M = 3b + \frac{b(b-3a)}{b-a} = \frac{3b(b-a) + b(b-3a)}{b-a} = \frac{b(4b-6a)}{b-a}.$$

隅にいる警備員

警備員が $H = (-\frac{b}{2}, -\frac{b}{2})$ にいるとする。H を通る二つの壁は全体が見え、その長さは $2b$ である。図は対角線 $y = x$ に関して対称なので、右側の壁を調べる。先ほどと同じ議論により、見える部分は H と角 $K = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ を通る直線で区切られ、その傾きは

$$\frac{\frac{b}{2} - \frac{a}{2}}{\frac{b}{2} + \frac{a}{2}} = \frac{b-a}{b+a}.$$

である。壁 $x = \frac{b}{2}$ までの水平距離 b の間に、この直線は $\frac{b(b-a)}{a+b}$ だけ上昇する。これは b より小さいので、a と b の値にかかわらず、この直線は常に右側の壁に当たる。警備員には右側の壁が長さ $\frac{b(b-a)}{a+b}$ だけ見え、上側の壁も同じ長さだけ見え、どちらの壁もそれ以外の部分は見えない。したがって

$$C = 2b + \frac{2b(b-a)}{a+b} = \frac{2b(a+b) + 2b(b-a)}{a+b} = \frac{4b^2}{a+b}.$$

二つの位置の比較

場合 $b < 3a$。

$$C - M = \frac{4b^2}{a+b} - \frac{b^2}{a} = \frac{b^2(4a - (a+b))}{a(a+b)} = \frac{b^2(3a-b)}{a(a+b)} > 0,$$

よって**隅**のほうがよい。

場合 $b > 3a$。

$$M - C = \frac{b(4b-6a)}{b-a} - \frac{4b^2}{a+b} = \frac{b[(4b-6a)(a+b) - 4b(b-a)]}{(b-a)(a+b)} = \frac{2ab(b-3a)}{(b-a)(a+b)} > 0,$$

ここで $(4b-6a)(a+b) - 4b(b-a) = 4b^2 - 2ab - 6a^2 - 4b^2 + 4ab = 2ab - 6a^2$ を用いた。よって**壁の中点**のほうがよい。

$b = 3a$ のときは M の二つの式はどちらも $9a$ を与え、$C = \frac{36a^2}{4a} = 9a$ でもあるので、二つの位置は同等である。

検算

- $a = 1, b = 2$ とすると $M = 4$、$C = \frac{16}{3} \approx 5.33$ であり、隅のほうがよい。$a = 1, b = 5$ とすると $M = \frac{5 \cdot 14}{4} = 17.5$、$C = \frac{100}{6} \approx 16.67$ であり、中点のほうがよい。これらの

値は、壁に沿った数千個の点への視線を調べるコンピュータによる検証で確認した。

- $b \to a$ とすると建物が中庭全体を埋める。このとき $M \to a$（警備員自身のいる壁のみ）、$C \to 2a$（隅で交わる二つの壁）となり、期待どおりである。
- $b \to \infty$ とすると建物は無視できるほど小さくなる。$M = \frac{b(4b-6a)}{b-a}$ と $C = \frac{4b^2}{a+b}$ はどちらも外周の全長 $4b$ に近づき、どちらも常にそれより小さい。

よくある間違い

- $b > 3a$ のとき、壁の中点にいる警備員には両側の壁だけでなく、向かい側の壁の一部も見えることを忘れる。
- 建物の誤った角をかすめさせる。下から見るとき、問題となる角は下側の二つ $(\pm\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ である。
- 警備員自身のいる壁（または壁たち）を合計に含め忘れる。

STEP のその先へ

領域のどの部分がある点から見えるかという問題は、計算幾何学（computational geometry）に属する。古典的な「美術館定理」（art gallery theorem）によれば、n 本の壁をもつ多角形の美術館のすべての点を見張るには、$\lfloor n/3 \rfloor$ 人の警備員が常に十分であり、場合によってはその人数が必要となる。ここで行ったように可視領域を求めることは、そうした問題の基本的な第一歩であり、コンピュータグラフィックスにおいても同様である。そこでは陰面消去（hidden-surface removal）が同じ原理で働いている。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）が次の一歩としてよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。