解答例

# STEP I 2015、第 2 問

純粋数学 • 3 次方程式の三角関数による解法

> **STEP I 2015、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q2

## 鍵となる考え方

三次式(cubic)$4x^3 - 3x$ は、三倍角の公式(triple-angle formula)$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ にちょうど現れる形である。したがって、この形の三次方程式は、解を余弦の値として見当をつければ解ける。解が一つわかれば因数分解（factorise）でき、残った二次方程式を解けばよい。最後の小問では、変数の置き換え $y = 2x$ によって与えられた三次方程式をこの形に直す。そこで必要となる正確な値は小問 (i) で求めてある。

## 解答

### 小問 (i)

$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ と書き、加法定理（compound-angle formulae）を用いる。

$$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

となり、示すべき式が得られた。同様にして

$$\sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

分母を有理化（rationalise the denominator）すると、同値な形

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

が得られる。小問 (iii) ではこちらの形のほうが扱いやすい。

### 小問 (ii)

$c = \cos\alpha$、$s = \sin\alpha$ とおく。$\cos(2\alpha + \alpha)$ を展開すると

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha \\ &= (2c^2 - 1)c - 2s^2 c \\ &= 2c^3 - c - 2(1 - c^2)c \\ &= 4c^3 - 3c.\end{aligned}$$

よって $4c^3 - 3c - \cos 3\alpha = 0$ であり、$x = \cos\alpha$ は解である。

他の解を求めるため、$\cos 3\alpha$ を $4c^3 - 3c$ で置き換えて因数分解する。

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x - (4c^3 - 3c) &= 4(x^3 - c^3) - 3(x - c) \\ &= (x - c)(4x^2 + 4cx + 4c^2 - 3).\end{aligned}$$

**考えてみよう** 二次の因数の判別式はどのように簡単にできるか？

$c^2 + s^2 = 1$ を用いると、判別式（discriminant）は $16c^2 - 16(4c^2 - 3) = 48(1 - c^2) = 48s^2$ である。その平方根は $4\sqrt{3}\,|s|$ であるが、符号 $\pm$ の両方をとるので絶対値は外してよい。解の公式（quadratic formula）より

$$x = \frac{-4c \pm 4\sqrt{3}\,s}{8},$$

となるので、残りの二つの解は

$$x = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \quad \text{および} \quad x = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

である。これらは $\cos(\alpha - 120^\circ)$ と $\cos(\alpha + 120^\circ)$ に等しい。これは納得のいく結果である。実際、$3(\alpha \pm 120^\circ) = 3\alpha \pm 360^\circ$ であるから、これらの角は $\alpha$ と同じ $\cos 3\theta$ の値をもつ。

### 小問 (iii)

**考えてみよう** 与えられた三次式は $y^3 - 3y - \sqrt{2}$ であり、$4x^3 - 3x - \cdots$ の形ではない。両者をどのように対応させればよいか？

小問 (ii) と同じように、三次の係数と一次の係数の比を 4 対 3 にしたい。$y = 2x$ とおくと

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0 \iff 4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

これは $\cos 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$ とした小問 (ii) の方程式であるから、$\alpha = 15^\circ$ ととればよい。すると小問 (ii) から三つの解 $x$ が得られる。これらは互いに異なる（後述）ので、三次方程式の解はこれですべてであり、$y = 2x$ より

$$y = 2\cos\alpha, \qquad y = -\cos\alpha \pm \sqrt{3}\sin\alpha, \qquad \alpha = 15^\circ.$$

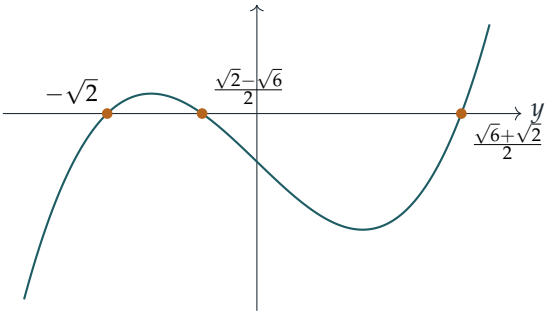
となる。ここに小問 (i) の値を代入する。

- $y = 2\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$。
- $y = -\cos 15^\circ + \sqrt{3}\sin 15^\circ = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{18}-\sqrt{6})}{4}$ であり、これを整理すると $\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ となる。
- $y = -\cos 15^\circ - \sqrt{3}\sin 15^\circ = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - (3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} = -\sqrt{2}$。

ここで $\sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ を用いた。この三つの値は明らかに互いに異なる。よって解は

$$y = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}, \qquad y = -\sqrt{2}.$$

である。角を用いて表せば、それぞれ $2\cos 15^\circ$、$2\cos 255^\circ$、$2\cos 135^\circ$ である。




## 検算

- $y^3 - 3y - \sqrt{2}$ の $y^2$ の係数は 0 であるから、解の和は 0 でなければならない。実際、$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - \sqrt{2} = 0$ である。
- 解の積は $\sqrt{2}$ になるはずである。$(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6}) = 2-6 = -4$ であるから、積は $(-1)\cdot(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ となる。
- 解 $y = -\sqrt{2}$ は直接確かめやすい：$-2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$。数値的には $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \approx 1.93185$ であり、$(1.93185)^3 - 3(1.93185) \approx 1.41421 = \sqrt{2}$ となる。

- 小問 (ii) で $\alpha = 0$ とすると、方程式 $4x^3 - 3x - 1 = 0$、すなわち $(x-1)(2x+1)^2 = 0$ が得られる。公式から得られる解は $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ であり、確かに一致する。

## よくある間違い

- 小問 (iii) で変数の置き換えを忘れ、$4x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0$ を解いてしまう。この方程式では $\cos 3\alpha = \sqrt{2} > 1$ が必要となり、これは不可能である。
- $y = 2x$ ではなく $x$ の値を答えとしてしまう。
- 符号 $\pm$ によって $\sin\alpha < 0$ の場合も扱えていることに触れずに、$\sqrt{3(1-c^2)} = \sqrt{3}\sin\alpha$ と書いてしまう。

## STEP のその先へ

これは三つの実数解をもつ三次方程式を解く三角関数による方法であり、ヴィエト（Viète）によるものである。どの三次方程式も、平行移動によって二次の項を消去し、$t^3 + pt + q = 0$ の形にできる。$p < 0$ のとき、$t = 2\sqrt{-p/3}\,x$ という置き換えによって $4x^3 - 3x = k$ の形になる。この場合、カルダノの公式（Cardano's formula）は役に立たない。三つの解がすべて実数であるにもかかわらず、負の数の平方根を経由してしまうからである。なぜそうなるのか、そして余弦を用いる工夫がなぜそれを回避できるのかを考えると、自然に複素数（complex numbers）と 1 の累乗根（roots of unity）へと導かれる。Needham の *Visual Complex Analysis* は、これについての美しい幾何学的描像を与えている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。