解答例

STEP I 2015、第 13 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

> **STEP I 2015、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q13

鍵となる考え方

最初の 6 がいつ出るかで条件付け（conditioning）をする。最初の 6 が第 n 回目に出るとわかっていれば、それより前の $n-1$ 回の投げはそれぞれ独立に $1,\dots,5$ のどれも等確率でとるので、最初の 6 より前の 4 や 5 に関する問いは通常の二項分布（binomial distribution）の問題になる。そのうえで n について和をとると、等比級数（geometric series）とその導関数が現れる。ヒントにある二項展開（binomial expansion）が使われるのはまさにこの場面である。

解答

各回の投げは独立（independent）であり、どの目も確率 $\frac{1}{6}$ で出る。最初の 6 が第 n 回目に出るという事象を A とし、$p_n = \mathrm{P}(A)$ とおく。

小問 (i)

最初の 6 が第 n 回目に出るのは、第 $1,\dots,n-1$ 回目がすべて 6 以外で、第 n 回目が 6 であるときであり、そのときに限る。独立性より、

$$\mathrm{P}(A) = p_n = \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1}\tfrac{1}{6}, \qquad n = 1,2,3,\dots$$

条件付けに関する事実。 A のもとでは、第 $1,\dots,n-1$ 回目の各投げについてわかっているのは「6 ではない」ということだけである。さいころは公正で各回の投げは独立なので、これら $n-1$ 回の投げは独立であり、それぞれ $\{1,2,3,4,5\}$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う。以降のすべての小問で、この事実と全確率の法則（law

of total probability）$\mathrm{P}(X) = \sum_n \mathrm{P}(X \mid A)\, p_n$ を用いる。

小問 (ii)

最初の 6 より前に 5 が一度も出ないという $\mathrm{P}(B')$ を求めるほうが易しい。A のもとで、それより前の $n-1$ 回の各投げが 5 を避ける確率は $\frac{4}{5}$ なので、

$$\mathrm{P}(B') = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-1} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{2}.$$

よって $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$ である。

小問 (iii)

包除原理（inclusion–exclusion principle）を余事象（complement）の形で用いると、

$$\mathrm{P}(B \cap C) = 1 - \mathrm{P}(B') - \mathrm{P}(C') + \mathrm{P}(B' \cap C').$$

目 4 と目 5 の対称性（symmetry）より、$\mathrm{P}(C') = \mathrm{P}(B') = \frac{1}{2}$ である。$B' \cap C'$ については、A のもとでそれより前の各投げが 4 と 5 の両方を避けなければならず、その確率は $\frac{3}{5}$ である：

$$\mathrm{P}(B' \cap C') = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-1} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}.$$

したがって $\mathrm{P}(B \cap C) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ である。

小問 (iv)

A のもとで、それより前の $n-1$ 回の投げのうち 5 が出る回数は $\mathrm{B}(n-1, \frac{1}{5})$ に従うので、

$$\mathrm{P}(D \mid A) = (n-1)\tfrac{1}{5} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-2} \qquad (n \geq 2),$$

であり、$n = 1$ のときは 0 である。よって

$$\mathrm{P}(D) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\tfrac{1}{5} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-2} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6}.$$

$\frac{5}{6}$ を 1 つくくり出し、残りを組にする：$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$、$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$ である。$m = n-1$ とおくと、

$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{36} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\tfrac{2}{3}\right)^{m-1} = \tfrac{1}{36} \left(1 - \tfrac{2}{3}\right)^{-2} = \tfrac{9}{36} = \tfrac{1}{4},$$

ここで、与えられた展開を指数 -2 の場合に用いた：$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$。

考えてみよう 一方または両方が起こるすべての場合を列挙せずに、$\mathrm{P}(D \cup E)$ を求めるにはどうすればよいか。

小問 (v)

$\mathrm{P}(D \cup E) = \mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(E) - \mathrm{P}(D \cap E)$ を用いる。4 と 5 の対称性より $\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(D) = \frac{1}{4}$ である。したがって、求める必要があるのは $\mathrm{P}(D \cap E)$ だけである。

A のもとで、それより前の $n-1$ 回の投げのうち 4 がちょうど 1 回、5 がちょうど 1 回出るということは、どの回が 5 でどの回が 4 かを選び（順序を区別して $(n-1)(n-2)$ 通り）、残りの $n-3$ 回がすべて $\{1,2,3\}$ に属するということである：

$$\mathrm{P}(D \cap E \mid A) = (n-1)(n-2)\left(\tfrac{1}{5}\right)^2\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-3} \qquad (n \geq 3).$$

すると

$$\mathrm{P}(D \cap E) = \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)(n-2)\tfrac{1}{25}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-3}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1}\tfrac{1}{6}.$$

$\left(\frac{5}{6}\right)^2$ をくくり出すと定数 $\frac{1}{25}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$ が得られ、また $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{2}$ である。$k = n-3$ とおくと、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D \cap E) &= \tfrac{1}{216}\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \tfrac{2}{216}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)!}{k!\,2!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \\ &= \tfrac{1}{108}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{-3} = \tfrac{8}{108} = \tfrac{2}{27},\end{aligned}$$

ここで、与えられた展開を指数 -3 の場合に用いた。その x^k の係数は $\frac{(k+2)!}{k!\,2!}$ である。したがって

$$\mathrm{P}(D \cup E) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{27} = \tfrac{27-4}{54} = \tfrac{23}{54}.$$

検算

すべての答えをもっと鮮やかに見通す方法があり、これは格好の検算になる。1, 2, 3 の目が出た投げ（さらに (ii) と (iv) では 4 も）はすべて無視する。それらは事象にまったく影響しないからである。残った関係のある投げは、関係のある各目が等確率で現れる列をなす。

- (ii)：5 か 6 が出る最初の投げは、そのどちらであることも等確率なので、$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$ である。
- (iii)：4, 5, 6 のうち、3 つの目のそれぞれが「初めて現れるのが最も遅い目」になることは等確率であり、$B \cap C$ は 6 が最も遅いことを意味するので、$\frac{1}{3}$ である。

- (iv)：D は、5 または 6 からなる列が 5, 6 で始まることを意味する。その確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ である。
- (v)：$D \cap E$ は、4・5・6 からなる列が 4,5,6 または 5,4,6 で始まることを意味する。その確率は $2\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}$ である。

5 つの答えはすべて、3×10^5 通りの投げの列によるコンピュータ・シミュレーションでも確認した。シミュレーションでは $\mathrm{P}(D \cup E) \approx 0.426$ となり、$\frac{23}{54} \approx 0.4259$ と一致した。

よくある間違い

- それより前の投げを 6 つの目すべての上で一様とみなしてしまう：A のもとではそれらは 6 にはなりえないので、5 が出る確率は $\frac{1}{6}$ ではなく $\frac{1}{5}$ である。
- (v) で因子 $(n-1)(n-2)$ を忘れる、あるいは $\binom{n-1}{2}$ を用いてしまう。後者では 2 回の投げのどちらが 4 かが区別されない。
- (v) で重なりを引かずに $\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(E)$ を足してしまう。

STEP のその先へ

ここで行ったように確率的な停止時刻（stopping time）で条件付けをして和をとることは、全確率の法則の最も有用な形であり、現れた級数は負の二項分布（negative binomial distribution）の母関数（generating function）である。「関係のない投げを無視する」という検算は、強力な考え方の一例である。すなわち、関係のあることが起こる瞬間だけを観察した過程は、もとの過程よりはるかに単純になることが多い。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この両方の考え方を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。