解答例

STEP I 2015、第 12 問

確率・統計 ・ ポアソン分布の間引き

> **STEP I 2015、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q12

鍵となる考え方

到着人数で条件をつけると、手術を必要とする人数は二項分布に従う個数になる。そのうえで、ありうるすべての到着人数について和をとれば（全確率の法則（law of total probability））、手術を必要とする人数の分布が得られ、その和は指数関数の級数にまとまる。最後の小問で鍵となるのは、平均が等しい独立な 2 つのポアソン分布（Poisson distribution）に従う個数を、その合計で条件づけると、両者への振り分けが二項分布（binomial distribution）に従うという事実である。

解答

ある 1 日に到着する負傷者の数を X とし、そのうち手術を必要とする人数を Y とする。

小問 (i)

$X = n$ という条件のもとで、n 人の負傷者はそれぞれ他と独立に確率 $\frac{1}{4}$ で手術を必要とする。したがって条件付きで $Y \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{4})$ であり、$0 \le r \le n$ に対して

$$\mathrm{P}(Y = r \mid X = n) = \binom{n}{r}\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{n-r} = \binom{n}{r}\frac{3^{n-r}}{4^n}.$$

（$r > n$ のときは確率は 0 である。）

小問 (ii)

$r \geq 0$ を固定する。$Y = r$ が起こりうるのは $X \geq r$ のときに限られるから、全確率の法則より

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y = r) &= \sum_{n=r}^{\infty} \mathrm{P}(X = n)\,\mathrm{P}(Y = r \mid X = n) \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-8} 8^n}{n!} \cdot \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{n-r}. \end{aligned}$$

$n!$ は約分される。ここで $8^n = 8^r \cdot 8^{n-r}$ と分けると、$8^r (\frac{1}{4})^r = 2^r$、$8^{n-r} (\frac{3}{4})^{n-r} = 6^{n-r}$ となるので

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y = r) &= \frac{\mathrm{e}^{-8} 2^r}{r!} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{6^{n-r}}{(n-r)!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-8} 2^r}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k}{k!} \qquad (k = n - r) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-8} 2^r}{r!}\, \mathrm{e}^6 = \frac{\mathrm{e}^{-2} 2^r}{r!}. \end{aligned}$$

これはすべての $r = 0, 1, 2, \ldots$ について成り立つから、1 日に手術を必要とする人数は平均 $8 \times \frac{1}{4} = 2$ のポアソン分布に従う。

考えてみよう e^6 はどこから出てきたのか？

r だけに依存するものをすべて和の外に出すと、残るのは $\sum 6^k/k!$、すなわち e^6 の指数関数の級数である。8^n を $8^r \cdot 8^{n-r}$ と分けることこそが、残りの和を $n - r$ だけに依存させる決め手なのである。

小問 (iii)

月曜日と火曜日に手術を必要とする人数をそれぞれ M、T とする。小問 (ii) より、どちらも $\mathrm{Po}(2)$ に従う。異なる日の到着は独立であり、負傷者は互いに独立に手術を必要とするから、M と T は独立である。すると

$$\mathrm{P}(M = 8 \mid M + T = 12) = \frac{\mathrm{P}(M = 8,\ T = 4)}{\mathrm{P}(M + T = 12)}.$$

独立性より分子は

$$\mathrm{P}(M = 8)\,\mathrm{P}(T = 4) = \frac{\mathrm{e}^{-2} 2^8}{8!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-2} 2^4}{4!} = \frac{\mathrm{e}^{-4}\, 2^{12}}{8!\,4!}.$$

分母については、独立なポアソン確率変数の和は平均を足し合わせたポアソン分布に従うので、$M + T \sim \mathrm{Po}(4)$ である。この事実を引用したくなければ、直接次のように

導ける：

$$\mathrm{P}(M+T=12)=\sum_{m=0}^{12}\frac{\mathrm{e}^{-2}2^m}{m!}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2}2^{12-m}}{(12-m)!}=\frac{\mathrm{e}^{-4}2^{12}}{12!}\sum_{m=0}^{12}\binom{12}{m}=\frac{\mathrm{e}^{-4}\,4^{12}}{12!},$$

ここで $\sum_m \binom{12}{m}=2^{12}$ を用いた。割り算をすると

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(M=8\mid M+T=12)&=\frac{\mathrm{e}^{-4}\,2^{12}}{8!\,4!}\cdot\frac{12!}{\mathrm{e}^{-4}\,4^{12}}\\&=\binom{12}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{495}{4096}.\end{aligned}$$

$495=3^2\cdot5\cdot11$ は奇数で $4096=2^{12}$ であるから、この分数は既約である。よって求める確率は $\dfrac{495}{4096}$ である。

考えてみよう なぜ答えが二項分布の確率のような形をしているのか？

合計が 12 であるという条件のもとでは、2 日間の平均が等しいので、12 件の手術症例のそれぞれは月曜日から来たのか火曜日から来たのかが同様に確からしい。したがって月曜日の人数は $\mathrm{B}(12,\frac{1}{2})$ に従う。もとの平均 8 が完全に消えていることに注意しよう。

検算

- 小問 (ii) の平均は $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\big(\mathrm{E}(Y\mid X)\big)=\mathrm{E}(X/4)=2$ と一致する。
- 小問 (ii) の級数を $r=0,\dots,14$ について数値的に計算すると、丸め誤差の範囲で $\mathrm{e}^{-2}2^r/r!$ が再現される。たとえば $\mathrm{P}(Y=0)=\sum_n \mathrm{e}^{-8}8^n(\frac{3}{4})^n/n!=\mathrm{e}^{-8}\mathrm{e}^{6}$ である。
- $m=0,\dots,12$ に対する条件付き確率 $\binom{12}{m}/2^{12}$ の和は 1 であり、$495/4096\approx0.121$ である。モデル全体（ポアソン分布に従う到着、続いてそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で手術）のコンピュータ・シミュレーションでも、これと整合する値が得られた。

よくある間違い

- 小問 (ii) の和を $n=r$ からではなく $n=0$ から始めてしまう。到着者が r 人未満なら、r 人が手術を必要とすることはありえない。
- 小問 (iii) で各日に $\mathrm{Po}(8)$ を用いてしまう。条件づけているのは手術症例の数なので、関係する平均は 2 である。（この問題では結局平均は打ち消し合うが、途中の計算は正しくあるべきである。）
- 既約分数で答えるよう求められているのに、答えを $\binom{12}{8}/2^{12}$ や $1980/16384$ のままにしてしまう。

STEP のその先へ

小問 (ii) の内容は**間引き**（thinning）と呼ばれる。ポアソン過程（Poisson process）の各点を独立に確率 p で残すと、残った点は強度が p 倍のポアソン過程をなし、しかも意外なことに、捨てられた点とは独立になる。小問 (iii) はこの逆である。独立なポアソン分布に従う個数は、その合計で条件づけると多項分布（multinomial distribution）に従って振り分けられる。この 2 つの事実はポアソン過程の理論の土台であり、大学最初の確率論の講義で出会うことになる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。