解答例

STEP I 2015、第 11 問

力学 ・ 摩擦とモーメント

> **STEP I 2015、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q11

鍵となる考え方

円柱（cylinder）にはたらく垂直抗力（normal reaction）はどれも半径に沿って作用するので、中心を通る。したがって、それぞれの中心のまわりのモーメント（moment）を考えると、重力とすべての垂直抗力が消え、摩擦力（frictional force）だけが残る。しかも摩擦力はすべて中心から同じ距離のところに作用する。これで小問 (i) はほとんど労せずに得られる。小問 (ii) では、各円柱について斜面に平行な方向の力を分解し、そのうえで不等式が問題にしている二つの接触点に摩擦の法則を適用する。

解答

二つの円柱を半径 r の一様な剛体の円柱としてモデル化する。どちらも斜面に接しており、上側の円柱のほうが斜面の上方にある。半径が等しいので、中心を結ぶ線は斜面に平行であり、円柱どうしの接触点は斜面から高さ r のところ、つまり両方の中心と同じ高さにある。円柱どうしの間の垂直抗力は中心を結ぶ線に沿って（斜面に平行に）はたらき、円柱どうしの間の摩擦力は斜面に垂直にはたらく。

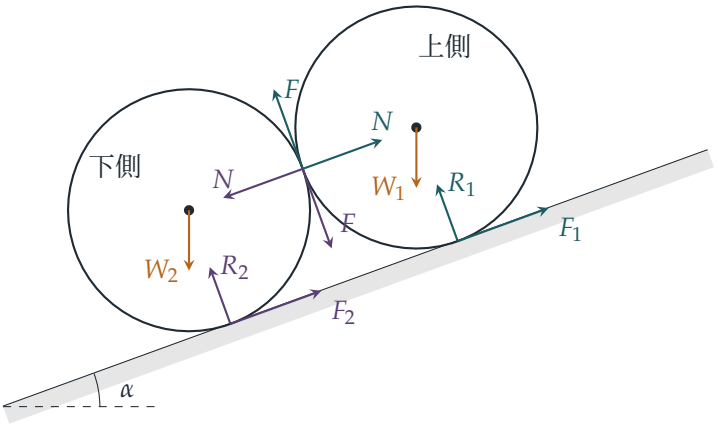
斜面に沿って上向きを x 方向、斜面に垂直で斜面から離れる向きを y 方向とする。次のようにおく。

- R_1, R_2 を、斜面が上側の円柱、下側の円柱に及ぼす垂直抗力とする。
- F_1, F_2 を、斜面が上側の円柱、下側の円柱に及ぼす摩擦力とし、斜面に沿って**上向き**を正として測る（符号つきの量とするので、負の値なら斜面に沿って下向きを意味する）。
- N を、下側の円柱が上側の円柱に及ぼす垂直抗力とする。これは斜面に沿って上向

きにはたらく。

- F を、下側の円柱が上側の円柱に及ぼす摩擦力とし、斜面**から離れる向き**を正として測る（これも符号つき）。

ニュートンの第 3 法則（Newton's third law）により、上側の円柱は下側の円柱に、斜面に沿って下向きに N を、斜面に向かう向きに F を及ぼす。



上側の円柱にはたらく力をティール色で、下側の円柱にはたらく力をプラム色で示している。

小問 (i)

上側の円柱の中心のまわりのモーメントを考える。重力は中心に作用し、R_1 と N はどちらも半径に沿って作用するので、いずれもモーメントをもたない。残るのは二つの摩擦力だけであり、どちらも中心から距離 r の接線（tangent）に沿って作用する。

- F_1 は円柱の最下点で斜面に沿って上向きに作用し、（図において）反時計回りのモーメント rF_1 を与える。
- F は接触点で斜面から離れる向きに作用する。接触点は中心より斜面の下側にあるので、時計回りのモーメント rF を与える。

つり合い（equilibrium）の状態ではこれらが打ち消し合うので、$rF_1 = rF$、すなわち $F_1 = F$ である。

考えてみよう 中心のまわりのモーメントを考えるとき、垂直抗力を無視できるのはなぜか。

円に対する垂直抗力は接触点における接線に垂直なので、半径に沿っており、その作

用線（line of action）は中心を通る。したがって中心のまわりのモーメントは 0 である。まさにこの理由から、ここでは中心のまわりのモーメントを考えるのが適切なのである。

下側の円柱についても同様に、モーメントをもつのは F_2（最下点で斜面に沿って上向き、反時計回りのモーメント rF_2）と、接触点で斜面に向かう向きの摩擦力 F（接触点は中心より斜面の上側にあり、時計回りのモーメント rF）だけである。よって $F_2 = F$ である。

ゆえに符号つきの量として $F = F_1 = F_2$ であり、特にそれらの大きさは等しい。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

各円柱について、斜面に平行な方向に力を分解する。

$$\begin{aligned} \text{上側：} \quad & F_1 + N = W_1 \sin\alpha, \\ \text{下側：} \quad & F_2 = N + W_2 \sin\alpha. \end{aligned}$$

辺々を加え、$F_1 = F_2 = F$ を用いると、

$$2F = (W_1 + W_2)\sin\alpha, \qquad \text{よって} \qquad F = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0,$$

となる。これから、どの摩擦力も図に描いた向きにはたらくこともわかる。これを代入し直すと、

$$N = W_1 \sin\alpha - F = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha,$$

となり、$W_1 > W_2$ かつ $\alpha > 0$ なのでこれは正である。したがって、二つの円柱は確かに互いに押し合っている。上側の円柱について斜面に垂直な方向に力を分解すると、

$$R_1 + F = W_1 \cos\alpha, \qquad \text{よって} \qquad R_1 = W_1 \cos\alpha - F.$$

考えてみよう 実際に必要なのは、どの摩擦の不等式か。

つり合いの状態では、各接触点での摩擦力は、そこでの摩擦係数（coefficient of friction）と垂直抗力の積以下である。一つ目の結果は円柱どうしの接触点から、二つ目の結果は上側の円柱と斜面の接触点から得られる。（下側の円柱と斜面の接触点からは μ_2 を含む三つ目の条件が得られるが、これは問われていない。）

円柱どうしの間。 $F \le \mu N$ が必要である。すなわち

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \le \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

正の量 $\frac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$ で割ると

$$\mu \ge \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

となり、示すべき結果が得られる。

上側の円柱と斜面の間。 $F \le \mu_1 R_1 = \mu_1(W_1\cos\alpha - F)$ が必要である。すなわち

$$(1+\mu_1)F \le \mu_1 W_1 \cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(1+\mu_1)(W_1+W_2)\sin\alpha \le \mu_1 W_1 \cos\alpha.$$

斜面（inclined plane）の傾斜角は $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ を満たすので $\cos\alpha > 0$ であり、また $(1+\mu_1)(W_1+W_2) > 0$ である。これら両方で割ると、

$$\tan\alpha \le \frac{2\mu_1 W_1}{(1+\mu_1)(W_1+W_2)},$$

となり、示すべき結果が得られる。（$\mu_1 R_1 \ge F > 0$ なので、この条件から $R_1 > 0$ も導かれ、上側の円柱は斜面から離れないことに注意しよう。）

検算

- $W_1 = 3, W_2 = 1$ のときは $\mu \ge 2$ が必要であり、さらに $\mu_1 = 1$ とすると $\tan\alpha \le \frac{3}{4}$ が必要である。このような値を六つのつり合いの式（各円柱について二つの分解の式と一つのモーメントの式）に代入して直接解くと、上と同じ F, N, R_1 が得られる。
- $W_1 \to W_2$ のとき、μ に対する下限は無限大に発散する。これは納得がいく。このとき $N \to 0$ となり、円柱どうしはほとんど押し合わないのに、両者の間の摩擦力は依然として $\frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$ でなければならないからである。
- $\mu_1 \to \infty$ のとき、条件は $\tan\alpha \le 2W_1/(W_1+W_2)$ となり、これはちょうど $R_1 \ge 0$ という条件である。上側の円柱が浮き上がり始めてしまえば、どれほど粗い斜面でも助けにはならない。

よくある間違い

- 円柱どうしの間の摩擦力が斜面に沿ってはたらくとしてしまうこと。摩擦力は接触点における共通接線に沿ってはたらき、ここではそれは斜面に垂直である。
- モーメントの式を忘れること。力の分解だけでは、未知数六つに対して式が四つしか得られない。摩擦力を決定するのは二つのモーメントの式である。
- 垂直抗力 R_1 の式に F を入れ忘れること。下側の円柱からの摩擦力は上側の円柱を斜面から離れる向きに押すので、R_1 は $W_1\cos\alpha$ より小さい。

STEP のその先へ

剛体（rigid body）がつり合いの状態にあるのは、合力と合モーメントの両方が 0 になるときに限られる。そして、モーメントを考える点をうまく選ぶことこそ、剛体の静力学における主要な技術である。ここでは式の個数と未知数の個数がちょうど等しかった。未知数のほうが式より多いとき、その問題は**不静定**（statically indeterminate）であるといい、解き切るには物体の変形をモデル化する必要がある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学とトルクを丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。