解答例

# STEP I 2015、第 10 問

力学 ・ 相対速度

> **STEP I 2015、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q10

## 鍵となる考え方

面に当たる雨は流束（flux）である。単位時間あたりの量は（単位体積あたりの雨粒の数）×（面積）×（雨の速度の、面に垂直な成分）で与えられる。バスが動いているときはバスの座標系（frame）で考える。この座標系では、雨の速度のうち水平成分だけが変わる。そのうえで、道のり全体について、この割合に所要時間 $D/u$ を掛け、$u$ について最小化する。絶対値（modulus）があるため、バスが雨の水平方向の動きより遅いか速いかによって、二つの場合に分かれる。

## 解答

### 雨がバスに当たる割合

雨を、空気中に一様に分布した雨粒としてモデル化する。単位体積あたり $n$ 個の雨粒があり、すべて同じ速度で動いているとする。バスの幅を $b$ とする。北を水平方向の正の向きにとる。南から吹きつける雨は北向きに動くので、その速度は

$$\text{水平成分} v\cos\theta \text{（北向き）}, \qquad \text{鉛直成分} v\sin\theta \text{（下向き）}.$$

をもつ。雨には東西方向の成分がないので、バスの二つの長い側面は濡れない。

**$u = 0$ の場合。**時間 $\delta t$ の間に屋根に当たる雨粒は、屋根の上に立つ、鉛直方向の高さ $v\sin\theta\,\delta t$ の斜めの角柱（prism）の中にある雨粒である。その体積は $ab\,v\sin\theta\,\delta t$ である。後面（南側の面、面積 $hb$）に当たる雨粒は、その後ろにある水平方向の奥行き $v\cos\theta\,\delta t$ の角柱を満たす。北を向いた前面は雨から遮られている。したがって、割合は

$$nb\,(h\,v\cos\theta + a\,v\sin\theta).$$

である。

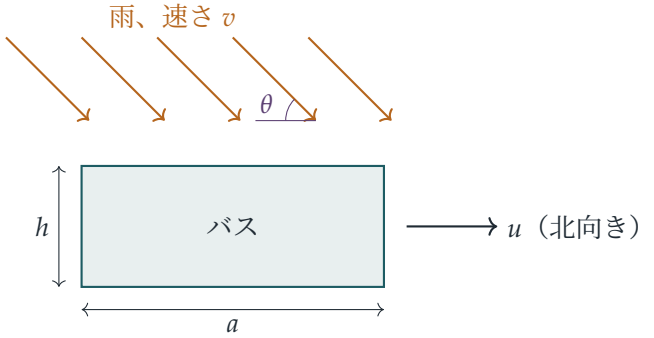
**$u > 0$ の場合。**一定の速度で動くバスの座標系では、雨の速度は

$$(v\cos\theta - u) \text{ 北向き}, \qquad v\sin\theta \text{ 下向き}.$$

となる。この座標系ではバスは静止しているので、上の議論は $v\cos\theta$ を $v\cos\theta - u$ に置き換えればそのまま成り立つ。鉛直成分は変わらないので、屋根は依然として割合 $nab\,v\sin\theta$ で雨を受ける。$v\cos\theta > u$ ならば、雨は依然としてバスを追い越し、割合 $nhb\,(v\cos\theta - u)$ で後面に当たる。$v\cos\theta < u$ ならば、バスが雨の中に突っ込んでいく形になり、雨は割合 $nhb\,(u - v\cos\theta)$ で前面に当たる。いずれの場合も、全体の割合は

$$nb\left(h\,|v\cos\theta - u| + a\,v\sin\theta\right),$$

であり、これは求めるとおり $h|v\cos\theta - u| + av\sin\theta$ に比例する。




### 速さの選び方

道のりの長さを $D$ とする。所要時間は $D/u$ なので、受ける雨の総量は

$$R(u) = \frac{D}{u}\left(h|v\cos\theta - u| + av\sin\theta\right), \qquad 0 < u \le w.$$

に比例する。$c = v\cos\theta$ とおき、絶対値を外す。

**$u \le c$ のとき：**

$$R(u) = D\left(\frac{hv\cos\theta + av\sin\theta}{u} - h\right).$$

分子は正なので、$R$ は $0 < u \le c$ で狭義単調減少（strictly decreasing）である。

**$u \ge c$ のとき：**

$$R(u) = D\left(h + \frac{v\,(a\sin\theta - h\cos\theta)}{u}\right).$$

これが増加するか減少するかは、$a\sin\theta - h\cos\theta$ の符号だけで決まる。

**? 考えてみよう** 速く走るほど良いとは限らないのはなぜか。

速く走れば所要時間が短くなり、これは屋根については常に有利にはたらく。屋根の分は $Dav\sin\theta/u$ だからである。しかし $u > c$ になると、バスは雨の中に突っ込んでいき、前面の分 $Dh(u-c)/u$ は $u$ とともに増える。どちらの効果が勝つかは、$a\sin\theta - h\cos\theta$ の符号で決まる。

二つの式は $u = c$ で一致するので、$R$ は連続（continuous）である。ここで、

- $w < v\cos\theta$ ならば、許されるすべての速さで $u \leq c$ であり、そこで $R$ は減少する。したがって、最善の選択は $u = w$ である。
- $a\sin\theta > h\cos\theta$ ならば、$R$ は $u \leq c$ でも $u \geq c$ でも減少する。したがって $R$ は $(0, w]$ 全体で減少し、やはり最善の選択は $u = w$ である。

これで最初の主張が証明された。

**$w > v\cos\theta$ かつ $a\sin\theta < h\cos\theta$ のとき：** $R$ は $(0, c]$ で減少し、$[c, w]$ で狭義単調増加する。したがって、最小となるのは

$$u = v\cos\theta,$$

のときであり、これは雨の水平方向の速さとちょうど同じ速さで走ることを意味する。このときバスから見ると雨は鉛直に降るので、濡れるのは屋根だけであり、総量は（ここでの単位で）$R(c) = Da\tan\theta$ となる。

**$a\sin\theta = h\cos\theta$ のとき：** $u \geq c$ では $R(u) = Dh$ であり、これは $u$ によらない。$w \geq v\cos\theta$ ならば、$v\cos\theta$ から $w$ までのどの速さも同じく最善である。$v\cos\theta$ より遅い速さはどれもそれより悪い。（$w < v\cos\theta$ ならば最初の場合が当てはまり、$u = w$ となる。）物理的には、$u = c$ を超えると、速く走ることで屋根で減る雨の量と前面で増える雨の量がちょうど等しくなる。この条件は $\tan\theta = h/a$ を意味する。すなわち、道路から見ると、雨はバスの側面の対角線に平行に降っている。

### 帰り道

今度はバスは南へ、雨に向かって進む。北向きを正とする約束のもとではバスの速度は $-u$ なので、雨の相対的な水平速度は $v\cos\theta + u > 0$ となり、雨は常に前面に当たる。総量は

$$R(u) = \frac{D}{u}\Big(h(v\cos\theta + u) + av\sin\theta\Big) = D\left(h + \frac{v\,(h\cos\theta + a\sin\theta)}{u}\right),$$

に比例し、これは $u$ について狭義単調減少である。したがって帰り道では、$a$、$h$、$\theta$ の値にかかわらず、運転手はできるだけ速く、$u = w$ で走るべきである。

## 検算

- $a = 1.3$、$h = 0.8$、$v = 2$、$\theta = 0.6$、$u = 0.7$ のとき、公式から得られる割合は（雨粒の密度と幅を単位量として）2.229 である。バスの断面を横切る雨粒をランダムに配置したコンピュータシミュレーションでは 2.232 となった。$u = 0$ の場合、$u > v\cos\theta$ の場合、$u$ が負の場合（帰り道）にも、同様によく一致した。
- $\theta \to \frac{1}{2}\pi$（雨が鉛直に降る）とする。このとき $a\sin\theta > h\cos\theta$ なので、全速力で走るべきである。これは理にかなっている。濡れるのは屋根だけであり、雨の中にいる時間が短いほど受ける雨は少ない。
- $\tan\theta = h/a$ となる等号の場合、予想どおり、総量 $Dh$ は $u = v\cos\theta$、$1.5v\cos\theta$、$3v\cos\theta$ のいずれでも同じである。

## よくある間違い

- 総量ではなく割合を最小化してしまう。割合には所要時間 $D/u$ を掛けなければならない。
- $u > v\cos\theta$ のとき、雨が後面ではなく前面に当たることを忘れる。絶対値が現れるのはこのためである。
- 帰り道でも $|v\cos\theta - u|$ を使ってしまう。このときの相対速度は $v\cos\theta + u$ である。

## STEP のその先へ

「密度 × 面積 × 法線方向の速度」という計算は、面を通過するベクトル場（vector field）の流束である。ベクトル解析では、これは面積分（surface integral）$\iint \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ となり、流体力学（fluid dynamics）や電磁気学（electromagnetism）における保存則（conservation laws）の出発点となる。バスの座標系に移ることはガリレイ変換（Galilean transformation）であり、相対性理論（relativity）の古典的な先駆けである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対運動とこの種の流束の議論の両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。