解答例

STEP I 2015、第 1 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP I 2015、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q1

鍵となる考え方

因数分解できるものはすべて因数分解する。2 次式が因数分解できるので零点（zeros）はすぐにわかり、導関数（derivative）もまた e^x と因数分解できる 2 次式の積になるので、極値をとる点（turning points）もすぐにわかる。グラフの概形が正しく描ければ、「曲線 $= k$」の解の個数を数えるには、水平な直線を上下に動かし、それが曲線と何回交わるかを見ればよい。小問 (ii) では、新しい関数がもとの関数に x^2 を代入したものであることに気づけば、ほとんどすべてを再利用できる。

解答

小問 (i)

$f(x) = e^x(2x^2 - 5x + 2) = e^x(2x - 1)(x - 2)$ とおく。

零点と符号。 $e^x > 0$ であるから、$f(x) = 0$ となるのはちょうど $x = \frac{1}{2}$ または $x = 2$ のときである。また、f は $x < \frac{1}{2}$ および $x > 2$ で正、$(\frac{1}{2}, 2)$ で負である。曲線は $f(0) = 2$ において y 軸と交わる。

極値をとる点。 積の微分法（product rule）により、

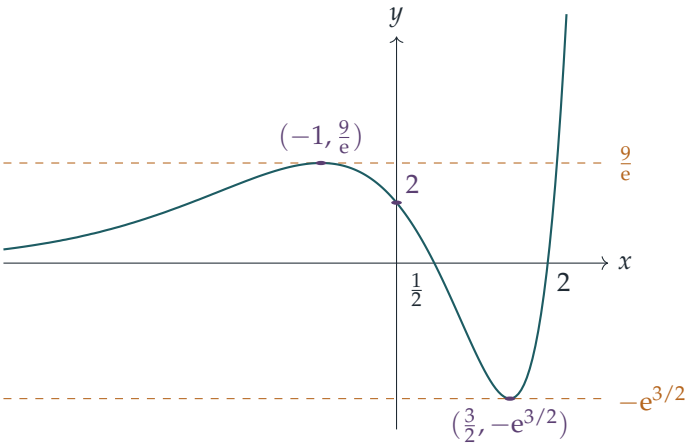
$$f'(x) = e^x(2x^2 - 5x + 2) + e^x(4x - 5) = e^x(2x^2 - x - 3) = e^x(2x - 3)(x + 1).$$

よって $f'(x) = 0$ となるのは $x = -1$ と $x = \frac{3}{2}$ である。f' の符号は $(2x - 3)(x + 1)$ の符号と一致し、$x < -1$ で正、$(-1, \frac{3}{2})$ で負、$x > \frac{3}{2}$ で正である。したがって f は増加

し、次に減少し、再び増加する。そして

$$f(-1) = \mathrm{e}^{-1}(2+5+2) = \frac{9}{\mathrm{e}} \approx 3.31 \qquad \text{（極大値）},$$
$$f(\tfrac{3}{2}) = \mathrm{e}^{3/2}(\tfrac{9}{2} - \tfrac{15}{2} + 2) = -\mathrm{e}^{3/2} \approx -4.48 \qquad \text{（極小値）}.$$

両端での振る舞い。 $x \to \infty$ のとき両方の因数が大きくなるので、$f(x) \to \infty$ である。$x \to -\infty$ のとき、与えられた事実（$n = 2, 1, 0$ の場合）から $2x^2\mathrm{e}^x$、$-5x\mathrm{e}^x$、$2\mathrm{e}^x$ のいずれも 0 に収束（converge）するので、$f(x) \to 0$ である。$x < \frac{1}{2}$ で $f > 0$ であるから、曲線は x 軸の負の部分に上から近づく。すなわち x 軸は漸近線（asymptote）である。



$f(x) = k$ の解の個数を数える。 解の個数は、水平な直線 $y = k$ が曲線と交わる回数に等しい。曲線を単調（monotonic）な 3 つの部分に分けて順に見ていく。

- $(-\infty, -1]$ では、f は狭義単調増加（strictly increasing）であり、$(0, \frac{9}{\mathrm{e}}]$ のすべての値をちょうど 1 回ずつとる（0 には決して達しない）。
- $[-1, \frac{3}{2}]$ では、f は $\frac{9}{\mathrm{e}}$ から $-\mathrm{e}^{3/2}$ まで狭義単調減少し、その間の各値をちょうど 1 回ずつとる。
- $[\frac{3}{2}, \infty)$ では、f は $-\mathrm{e}^{3/2}$ から ∞ まで狭義単調増加し、各値をちょうど 1 回ずつとる。

それぞれの寄与を合計すると（$x = -1$ や $x = \frac{3}{2}$ を二重に数えないよう注意する）、次のようになる。

$k < -e^{3/2}$	解なし
$k = -e^{3/2}$	解は 1 個（$x = \frac{3}{2}$）
$-e^{3/2} < k \leq 0$	解は 2 個
$0 < k < \frac{9}{e}$	解は 3 個
$k = \frac{9}{e}$	解は 2 個（$x = -1$ と、$x > 2$ を満たすもの 1 個）
$k > \frac{9}{e}$	解は 1 個

考えてみよう なぜ $k = 0$ のとき解は 3 個ではなく 2 個なのか？

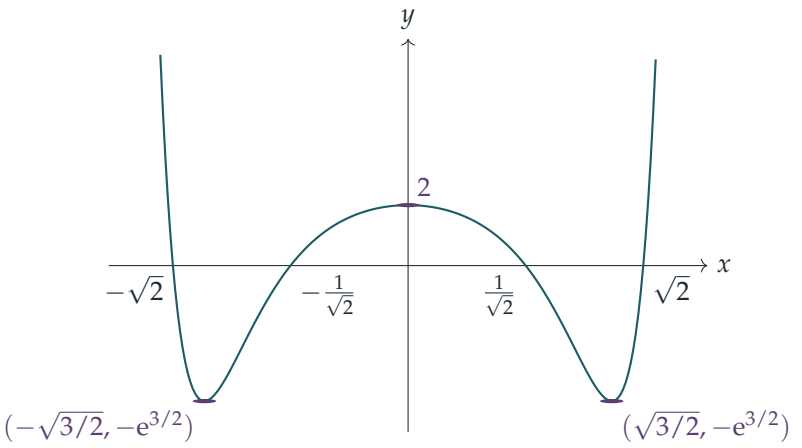
x 軸は左側で漸近線になっており、すべての $x < \frac{1}{2}$ に対して $f(x) > 0$ であるから、左端の部分は実際には決して 0 に達しない。$f(x) = 0$ の解は $x = \frac{1}{2}$ と $x = 2$ だけである。しかし、どんなに小さな $k > 0$ に対しても左側の部分は高さ k に達するので、解の個数は 3 個に跳ね上がるのである。

小問 (ii)

$g(x) = e^{x^2}(2x^4 - 5x^2 + 2)$ とおく。このとき $g(x) = f(x^2)$ であるから、g は偶関数（even function）であり、そのグラフは y 軸に関して対称である。x が $[0, \infty)$ を動くとき、$u = x^2$ は $[0, \infty)$ を増加しながら動くので、$x \geq 0$ における g のグラフは、f のグラフの $u \geq 0$ の部分をそのままなぞるだけである。

- $g(0) = f(0) = 2$ である。
- 零点は $x^2 = \frac{1}{2}$ または $x^2 = 2$ となるところ、すなわち $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ と $x = \pm\sqrt{2}$ である。
- 合成関数の微分法（chain rule）により $g'(x) = 2x\,f'(x^2) = 2x\,e^{x^2}(2x^2 - 3)(x^2 + 1)$ であり、これが 0 になるのは $x = 0$ と $x = \pm\sqrt{3/2}$ のときだけである。（$x^2 = -1$ は実数解をもたないので、f の $u = -1$ における極値の点は消えている。）

$0 < x < \sqrt{3/2}$ では $g'(x) < 0$、$x > \sqrt{3/2}$ では $g'(x) > 0$ である。よって $(0, 2)$ は極大点であり（対称性により、0 のすぐ左側では $g' > 0$）、$x = \pm\sqrt{3/2}$ は極小点で、その値は $f(\frac{3}{2}) = -e^{3/2}$ である。最後に、$x \to \pm\infty$ のとき $g(x) \to \infty$ であり、e^{x^2} という因数のために非常に急速に増大する。曲線は「W」字形になる。



検算

- $f(-1) = 9/e \approx 3.311$、$f(1.5) = -e^{1.5} \approx -4.482$ であり、近くのいくつかの点で f の値を計算すると、これらがそれぞれ極大値と極小値であることが確かめられる。
- $x = 0$ の近くでは $g(x) = f(x^2) \approx f(0) + f'(0)x^2 = 2 - 3x^2$ となり、これは下に凸でない（上に凸の）放物線であるから、$(0, 2)$ が極大点であることが確かめられる。
- 解の個数は、各範囲から k の値をいくつか選んでコンピュータで確認した（たとえば $k = 2$ では解は 3 個、$k = -1$ では解は 2 個）。
- $f(-40) \approx 1.4 \times 10^{-14}$ であり、漸近線から予想されるとおり、正で非常に小さい。

よくある間違い

- 曲線が左側では x 軸に近づくだけであることを忘れて、$k = 0$ のとき解を 3 個と数えてしまう。
- 境界の場合 $k = \frac{9}{e}$ と $k = -e^{3/2}$ を見落とす。これらの場合、直線は曲線に接し、2 つの解が 1 つに重なる。
- 小問 (ii) で、$x^2 = -1$ に対応する極値の点を残してしまう。

STEP のその先へ

解の個数を数える議論は、中間値の定理（intermediate value theorem）と狭義単調性とに基づいている。すなわち、区間上で連続かつ狭義単調増加な関数は、両端の値の間にある各値をちょうど 1 回ずつとる。大学の解析学の講義では、これらの事実

を、ここで仮定してよいとされた極限 $x^n e^x \to 0$ とともに丁寧に証明する。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、それがどのように行われるかを知るのに非常に読みやすい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。