解答例

STEP III 2014、第 9 問

力学 ・ 抵抗のある放物運動

STEP III 2014、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q9

鍵となる考え方

位置（position）が与えられているので、速度（velocity）は 1 回微分するだけで得られる。運動方程式（equation of motion）の確認も、$\mathbf{v}$ と $\dot{\mathbf{v}}$ を $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}$ に代入するだけである。その後はすべて成分の問題になる。$\mathbf{r}$ の $\mathbf{j}$ 成分から T が決まり、時刻 T における $\mathbf{v}$ の成分の比から $\tan\beta$ が得られる。最後の不等式は一見複雑だが、$x = kT$ とおいて分母を払うと、ちょうどヒントの $\sinh x > x$ に帰着する。

解答

速度と運動の確認

物体を質点（particle）とみなす。ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）より $m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} - mk\mathbf{v}$ であるから、運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{g} - k\mathbf{v},$$

であり、初期条件（initial conditions）は $t = 0$ で $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ である。

ここで $\mathbf{g}$ と $\mathbf{u}$ は定ベクトルなので、与えられた $\mathbf{r}$ を係数ごとに微分すればよい。

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{k - k\mathrm{e}^{-kt}}{k^2}\,\mathbf{g} + \frac{k\mathrm{e}^{-kt}}{k}\,\mathbf{u} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-kt}}{k}\,\mathbf{g} + \mathrm{e}^{-kt}\,\mathbf{u}.$$

もう一度微分すると $\dot{\mathbf{v}} = \mathrm{e}^{-kt}\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u}$ となる。一方、

$$\mathbf{g} - k\mathbf{v} = \mathbf{g} - (1 - \mathrm{e}^{-kt})\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u} = \mathrm{e}^{-kt}\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u},$$

であり、両者は一致するので運動方程式が成り立つ。$t = 0$ では $\mathrm{e}^0 = 1$ であるから、

$\mathbf{r} = \frac{0-1+1}{k^2}\mathbf{g} + 0\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{v} = 0\,\mathbf{g} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ となる。よって初期条件も両方とも成り立つ。

滞空時間

次に $\mathbf{u} = u\cos\alpha\,\mathbf{i} + u\sin\alpha\,\mathbf{j}$、$\mathbf{g} = -g\,\mathbf{j}$ とおく。$\mathbf{r}$ の $\mathbf{j}$ 成分は

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = -\frac{kt - 1 + \mathrm{e}^{-kt}}{k^2}\,g + \frac{1-\mathrm{e}^{-kt}}{k}\,u\sin\alpha.$$

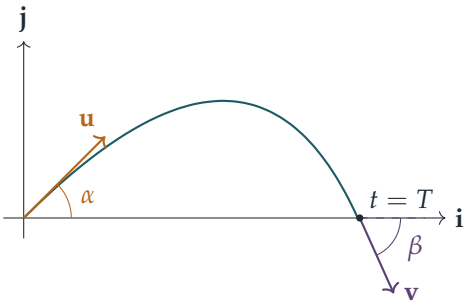
である。$t = T$ でこれを 0 とおき、k^2 を掛けると

$$uk\sin\alpha\,(1-\mathrm{e}^{-kT}) = (kT - 1 + \mathrm{e}^{-kT})g.$$

となる。$T > 0$ かつ $k > 0$ より $1-\mathrm{e}^{-kT} > 0$ であるから、これで割ってよい。$kT - 1 + \mathrm{e}^{-kT} = kT - (1-\mathrm{e}^{-kT})$ と書き直すと

$$uk\sin\alpha = \left(\frac{kT}{1-\mathrm{e}^{-kT}} - 1\right)g,$$

となり、求める式が得られる。



時刻 T における角度

$t = T$ において、$\mathbf{v} = \frac{1-\mathrm{e}^{-kT}}{k}\mathbf{g} + \mathrm{e}^{-kT}\mathbf{u}$ の成分は

$$v_x = \mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha, \qquad v_y = -\frac{1-\mathrm{e}^{-kT}}{k}\,g + \mathrm{e}^{-kT}u\sin\alpha.$$

である。$0 < \alpha < 90^\circ$ より $v_x > 0$ である。質点は落下してくるところなので $v_y < 0$ となるはずであり、これは後で証明する。したがって、$\mathbf{v}$ と $\mathbf{i}$ のなす鋭角（acute angle）は $\tan\beta = -v_y/v_x$ を満たす。v_x で割ると

$$\tan\beta = \frac{(1-\mathrm{e}^{-kT})g}{k\,\mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha} - \frac{\mathrm{e}^{-kT}u\sin\alpha}{\mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha} = \frac{(\mathrm{e}^{kT}-1)g}{uk\cos\alpha} - \tan\alpha,$$

となる。ここで $(1-\mathrm{e}^{-kT})/\mathrm{e}^{-kT} = \mathrm{e}^{kT} - 1$ を用いた。

$\tan\beta > \tan\alpha$ を示す

直前の結果から、$\tan\beta > \tan\alpha$ は

$$\frac{(\mathrm{e}^{kT}-1)g}{uk\cos\alpha} > 2\tan\alpha \iff (\mathrm{e}^{kT}-1)g > 2uk\sin\alpha,$$

と同値である（$uk\cos\alpha > 0$ を掛けた）。ここで滞空時間の結果を用いて $uk\sin\alpha$ を置き換えると、u と α が完全に消える。

? **考えてみよう** これを $\sinh kT$ を含む形にするにはどうすればよいか？

$x = kT > 0$ とおく。すると $\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1}$ であり、$g > 0$ で割ると、示すべき不等式は

$$\mathrm{e}^{x} - 1 > \frac{2x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1} - 2.$$

となる。$\mathrm{e}^{x} - 1 > 0$ を掛け（不等号の向きは変わらない）、展開すると

$$\begin{aligned}
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} + 1 > 2x\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{x} + 2 \\
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 1 > 2x\mathrm{e}^{x} \\
&\iff \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} > 2x \qquad (\mathrm{e}^{x} > 0 \text{ で割った}) \\
&\iff \sinh x > x.
\end{aligned}$$

となる。どの変形も逆向きにたどることができ、$kT > 0$ のとき $\sinh kT > kT$ である（これは仮定してよい）。よって $\tan\beta > \tan\alpha$ である。

これにより v_y の符号も確定する。$-v_y/v_x > \tan\alpha > 0$ かつ $v_x > 0$ を示したので、$v_y < 0$ である。質点は時刻 T において確かに下降しており、$\tan\beta$ の式は正当化される。

最後に、α と β はともに $(0°, 90°)$ に属し、この範囲で tan は狭義単調増加（strictly increasing）である。よって $\tan\beta > \tan\alpha$ から $\beta > \alpha$ が従う。抵抗（resistance）があると、質点は上がっていったときよりも急な角度で落ちてくるのである。

検算

- $\mathrm{e}^{-kt} \approx 1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2$ を用いると、$k \to 0$ のとき $\mathbf{r} \to \frac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{u}$ となる。これは通常の放物運動である。また、x が小さいとき $\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} - 1 \approx \frac{x}{2}$ であるから、滞空時間の式から $T \to 2u\sin\alpha/g$ が得られる。同様に $\tan\beta \to \frac{gT}{u\cos\alpha} - \tan\alpha = \tan\alpha$ となり、左右対称な放物線（parabola）になる。
- $k = 1\,\mathrm{s}^{-1}$、$g = 10\,\mathrm{m\,s}^{-2}$、$u = 10\,\mathrm{m\,s}^{-1}$、$\alpha = 45°$ とする。$\mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = 0$ を数値的に解くと $T \approx 1.185\,\mathrm{s}$ となり、抵抗がない場合の $1.414\,\mathrm{s}$ より短い。着地角は $\beta \approx 65.7° > 45°$

であり、どちらの公式も小数点以下何桁にもわたって一致する。コンピュータで $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}$ を逐次的に数値積分（numerical integration）すると、与えられた $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ が再現される。

よくある間違い

- マイナス符号をつけずに $\tan\beta = v_y/v_x$ としてしまう。着地時に v_y は負であり、β は鋭角である。
- $1 - \mathrm{e}^{-kT}$ や $\mathrm{e}^{kT} - 1$ で割ったり掛けたりするときに、それが正であることを述べない。これこそが不等号の向きを正しく保つ根拠である。
- $\tan\beta > \tan\alpha$ で止めてしまう。$\beta > \alpha$ を導くには、tan が鋭角の範囲で増加であることが必要である。

STEP のその先へ

与えられた $\mathbf{r}$ は線形微分方程式（linear differential equation）$\ddot{\mathbf{r}} + k\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}$ の解であり、この方程式は積分因子（integrating factor）e^{kt} を用いて直接解くことができる。速度に比例する抵抗（linear drag）は、$\mathbf{i}$ 方向と $\mathbf{j}$ 方向の運動が分離する唯一の抵抗法則である。より現実的な速度の 2 乗に比例する抵抗（quadratic drag）$-mk|\mathbf{v}|\mathbf{v}$ では両者が連成し、閉じた形の解（closed form）は存在しない。それでも、下りのほうが急になる非対称な軌道は、どちらの場合にも成り立つ。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、抵抗力を受ける運動をこうした観点から扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。