解答例

STEP III 2014、第 8 問

純粋数学 • 級数の収束

> **STEP III 2014、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q8

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.3 節「**発散する級数と、収束するその親戚**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/kempner.html

鍵となる考え方

正の整数をブロック $[k^n, k^{n+1})$ に切り分ける。各ブロック内のどの項も、そのブロックの先頭での値と次のブロックの先頭での値の間にあるので、各ブロックの和は「項数 × その二つの値」で上下から挟まれる。ブロックごとに足し合わせると、扱いにくい級数（series）が等比級数（geometric series）、あるいは各ブロックで定数となる項からなる級数に変わり、発散する（diverge）かどうかがすぐにわかる。数字 2 を含まない整数についても、各ブロックにいくつあるかを数えさえすれば、同じ数え方が使える。

解答

ブロックに関する不等式

ブロック $k^n \le r \le k^{n+1} - 1$ には

$$(k^{n+1} - 1) - k^n + 1 = k^{n+1} - k^n = k^n(k-1)$$

個の整数が含まれる。f は狭義単調減少（strictly decreasing）であるから、ブロック内のすべての r に対して

$$\mathrm{f}(k^{n+1}) < \mathrm{f}(r) \le \mathrm{f}(k^n),$$

が成り立つ。一つ目は $r < k^{n+1}$ から、二つ目は $r \geq k^n$ から従う（等号は $r = k^n$ のときに限る）。これを $k^n(k-1)$ 個の r の値について足し合わせると

$$k^n(k-1)\,\mathrm{f}(k^{n+1}) \leq \sum_{r=k^n}^{k^{n+1}-1} \mathrm{f}(r) \leq k^n(k-1)\,\mathrm{f}(k^n),$$

となり、求める不等式が得られる。（実際には左側の不等式は狭義の不等号で成り立つ。）



$k = 2$ のときのブロックと、各ブロックに含まれる項の個数。

小問 (i)

$k = 2$、$\mathrm{f}(r) = \frac{1}{r}$ とする。これは狭義単調減少である。ブロックに関する不等式は

$$\frac{2^n}{2^{n+1}} \leq \sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r} \leq \frac{2^n}{2^n}, \qquad \text{すなわち} \qquad \tfrac{1}{2} \leq \sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r} \leq 1.$$

となる。各ブロックは次のブロックが始まる直前で終わるので、$n = 0, 1, \ldots, N$ のブロックは隙間なくつながり、ちょうど $1 \leq r \leq 2^{N+1} - 1$ を覆う。$N+1$ 個の不等式を足し合わせると

$$\frac{N+1}{2} \leq \sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r} \leq N+1.$$

を得る。

結論の導出：部分和（partial sum）$H_m = \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r}$ は m について増加し、$H_{2^{N+1}-1} \geq \frac{N+1}{2}$ である。右辺は N を大きくとればいくらでも大きくできる。したがって部分和は有界（bounded）でなく、$\sum \frac{1}{r}$ は収束（converge）しない。

小問 (ii)

$k = 2$、$\mathrm{f}(r) = \frac{1}{r^3}$ とする。これもやはり狭義単調減少である。今度は右側の不等式だけを用いればよい：

$$\sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r^3} \leq \frac{2^n}{2^{3n}} = \frac{1}{4^n}.$$

先ほどと同様に $n = 0, 1, \ldots, N$ について足し合わせると

$$\sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r^3} \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

考えてみよう これで押さえられたのは部分和の一部にすぎない。なぜこれで無限和が押さえられるのか。

すべての項は正であるから、部分和は増加する。任意の部分和 $\sum_{r=1}^{m} r^{-3}$ は $2^{N+1}-1 \geq m$ となる部分和以下であり、したがって $\frac{4}{3}$ より小さい。上に有界な増加数列は収束し、その極限はその上界以下である。よって

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \leq \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}.$$

小問 (iii)

$S(1000)$ の要素を数える。 0 から 999 までの各整数を、先頭に 0 を補って 3 桁の数字列として書く（たとえば 7 は 007 となる）。補った 0 が 2 を生むことはないので、整数が 2 を含まないことと、その数字列が 2 を含まないことは同値である。3 つの各桁は $0,1,3,4,\ldots,9$ の 9 個の数字のいずれでもよいので、数字列は 9^3 通りあり、それぞれ異なる整数に対応する。そのうち一つは 000 で、これは正でないから、$S(1000)$ には 9^3-1 個の数が含まれる。

ブロックごとに数える。 桁数を $n+1$ にして同じ議論を行うと、$S(10^{n+1})$ には $9^{n+1}-1$ 個の整数があることがわかる。したがって、$(n+1)$ 桁の数からなるブロック $10^n \leq r \leq 10^{n+1}-1$ には、2 を含まない整数が

$$(9^{n+1}-1)-(9^n-1) = 8\cdot 9^n$$

個含まれる。（同じことだが、最上位の桁は 0 にも 2 にもなれないので 8 通り、残りの n 個の桁はそれぞれ 9 通りである。）

$\sigma(n)$ を評価する。 これは $k=10$ のブロックの議論であるが、2 を含まない整数だけを数える点が異なる。ブロック内のすべての r について $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{10^n}$ であるから、このブロックの和への寄与は高々

$$8\cdot 9^n \cdot \frac{1}{10^n} = 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^n.$$

である。ここで n を固定し、$n \leq 10^{M+1}$ となる M をとる。$S(n)$ のすべての要素は $m=0,1,\ldots,M$ のブロックのいずれかに属し、逆数はすべて正である。よって

$$\sigma(n) \leq \sum_{m=0}^{M} 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^m < \sum_{m=0}^{\infty} 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^m = \frac{8}{1-\frac{9}{10}} = 80.$$

二つ目の不等式が狭義であるのは、$m>M$ の正の項を除いているからである。したがって、すべての n について $\sigma(n)<80$ である。

検算

- 小問 (ii)：$\sum r^{-3} = 1.2020\ldots$（アペリー（Apéry）の定数）であり、$1\frac{1}{3}$ を十分に下回っている。
- 小問 (i) で $N = 2$ のとき：$\sum_{r=1}^{7} \frac{1}{r} \approx 2.593$ であり、1.5 と 3 の間にある。
- 小問 (iii)：直接数えると、1000 未満に $728 = 9^3 - 1$ 個、各ブロックに $8 \cdot 9^n$ 個あることが確かめられる。コンピュータで直接和をとると $\sigma(10^7) \approx 10.28$ となり、80 をはるかに下回る。この上界はかなり甘いが、問われているのはそれだけである。

よくある間違い

- ブロックの項数を数え間違える。ブロックは k^n から $k^{n+1} - 1$ までであり、項数は $k^{n+1} - k^n - 1$ ではなく $k^{n+1} - k^n$ である。
- (iii) で、n 番目のブロックに 2 を含まない数字列が 9^n 個すべてあるとして数えてしまう。最上位の桁は 0 になれないので、$8 \cdot 9^n$ 個しかない。9^{n+1} を使うと上界が 90 となり、不十分である。
- (ii) で、$2^{N+1} - 1$ までの部分和の上界を求めたところで止まり、無限和全体がなぜ有界なのかを述べない。

STEP のその先へ

これはコーシー（Cauchy）の凝縮判定法（condensation test）である：正の減少数列に対して、$\sum a_r$ が収束することと $\sum 2^n a_{2^n}$ が収束することは同値である。これにより、$\sum r^{-p}$ が収束するのは $p > 1$ のとき、かつそのときに限ることがすぐにわかる。小問 (iii) はケンプナー級数（Kempner series）である：発散する調和級数（harmonic series）から、ある特定の数字を含む整数をすべて取り除くと収束する級数になる。これは、大きな整数のほとんどすべてがあらゆる数字を含むからである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、凝縮判定法と比較判定法（comparison tests）を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。