解答例

STEP III 2014、第 7 問

純粋数学 • ベクトルと円に内接する四角形

STEP III 2014、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

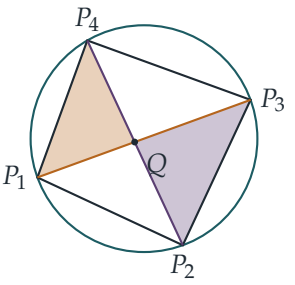
step.maths.org/questions/14-s3-q7

鍵となる考え方

小問 (i) は方べきの定理（intersecting chords theorem）であり、同じ弧に対する円周角（angles in the same segment）が等しいことから導かれる。ベクトルを用いる小問では、同じ事実をもう一度別の方法で示す。平面上の 4 点は「アフィン従属」（affinely dependent）であり、その従属関係の係数が対角線の交点の位置を決める。したがって係数は各対角線を既知の比に分ける。その比を (i) に代入すると、最終的な関係式が得られる。

解答

この図形について、全体を通して二つの事実を用いる。第一に、P_i のうちどの 3 点も同一直線上にない（共線（collinear）でない）。直線と円の共有点は高々 2 個だからである。第二に、頂点は円周上に順に名前が付けられているので、P_1 と P_3 は弦 P_2P_4 によって分けられる二つの異なる弧の上にある。よって両者は直線 P_2P_4 に関して反対側にあり、対角線は線分 P_1P_3 と P_2P_4 のどちらに対しても、その真に内部にある点 Q で交わる。



小問 (i)

三角形 P_1QP_4 と P_2QP_3 において、

- $\angle P_1QP_4 = \angle P_2QP_3$ である。これらは Q における対頂角（vertically opposite angles）だからである。
- $\angle QP_1P_4 = \angle P_3P_1P_4$ かつ $\angle QP_2P_3 = \angle P_4P_2P_3$ である。これらが等しいのは、どちらも同じ弧（P_1 と P_2 を通って P_4 から P_3 に至る弧）の上の点 P_1、P_2 から弦 P_3P_4 を見込む円周角だからである。

よって二つの三角形は $P_1 \leftrightarrow P_2$、$Q \leftrightarrow Q$、$P_4 \leftrightarrow P_3$ の対応で相似（similar）である。対応する辺の比は等しいので、

$$\frac{P_1Q}{P_2Q} = \frac{QP_4}{QP_3}, \qquad \text{よって} \qquad (P_1Q)(QP_3) = (P_2Q)(QP_4),$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）は平面上にあるので、3 つのベクトル $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$ はすべて 2 次元空間の中にある。2 次元の中の 3 つのベクトルは一次従属（linearly dependent）であるから、すべてが 0 ではない数 b_2, b_3, b_4 で

$$b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + b_4(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{0}.$$

を満たすものが存在する。（具体的には、P_1, P_2, P_3 は同一直線上にないので $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$ は平行でなく、したがって平面を張り（span）、$\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$ はそれらの一次結合で表される。このとき $b_4 = -1$ ととれる。）ここで $a_1 = -(b_2 + b_3 + b_4)$、$i = 2, 3, 4$ に対して $a_i = b_i$ とおく。すると $\sum a_i = 0$ であり、a_i のすべてが 0 ではなく、

$$\sum_{i=1}^{4} a_i\mathbf{p}_i = a_1\mathbf{p}_1 + b_2\mathbf{p}_2 + b_3\mathbf{p}_3 + b_4\mathbf{p}_4 = b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + b_4(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{0},$$

となるので、$(*)$ が成り立つ。

小問 (iii)

$a_1 + a_3 \neq 0$ であること。仮に $a_1 + a_3 = 0$ であったとする。すると $(*)$ の第 1 式より $a_2 + a_4 = 0$ でもあるので、$a_3 = -a_1$、$a_4 = -a_2$ である。第 2 式は

$$a_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) + a_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4) = \mathbf{0}.$$

となる。直線 P_1P_3 と P_2P_4 は異なり（そうでなければ 4 点すべてが同一直線上にあることになる）、Q で交わるので、平行ではない。よって $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ と $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4$ は零ベ

クトルでなく、互いに平行でもないので、$a_1 = a_2 = 0$ でなければならない。すると 4 つの a_i がすべて 0 となり、矛盾である。したがって $a_1 + a_3 \neq 0$ であり、同様に $a_2 + a_4 = -(a_1 + a_3) \neq 0$ である。

交点。 $(*)$ より $a_1\mathbf{p}_1 + a_3\mathbf{p}_3 = -(a_2\mathbf{p}_2 + a_4\mathbf{p}_4)$ かつ $a_1 + a_3 = -(a_2 + a_4)$ である。一方を他方で割ると、

$$\mathbf{r} = \frac{a_1\mathbf{p}_1 + a_3\mathbf{p}_3}{a_1 + a_3} = \frac{a_2\mathbf{p}_2 + a_4\mathbf{p}_4}{a_2 + a_4}.$$

第 1 の形から $\mathbf{r} = \mathbf{p}_1 + \dfrac{a_3}{a_1 + a_3}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)$ であり、これは直線 P_1P_3 上の点である。同様に、第 2 の形からこれは直線 P_2P_4 上の点でもある。平行でない 2 直線はただ 1 点でしか交わらないので、$\mathbf{r}$ は Q の位置ベクトル（position vector）である。

考えてみよう Q を表すこの式から、長さ P_1Q と QP_3 をどのように求めればよいだろうか？

引き算をすればよい。$\mathbf{q} = \mathbf{r}$ を用いると、

$$\mathbf{q} - \mathbf{p}_1 = \frac{a_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{a_1 + a_3}, \qquad \mathbf{p}_3 - \mathbf{q} = \frac{a_1(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{a_1 + a_3}.$$

長さをとると $P_1Q = \dfrac{|a_3|}{|a_1 + a_3|}P_1P_3$、$QP_3 = \dfrac{|a_1|}{|a_1 + a_3|}P_1P_3$ となる。同様に、$\mathbf{r}$ の第 2 の形から $P_2Q = \dfrac{|a_4|}{|a_2 + a_4|}P_2P_4$、$QP_4 = \dfrac{|a_2|}{|a_2 + a_4|}P_2P_4$ が得られる。

符号。 Q は P_1 と P_3 の真に間にあるので、分数 $\frac{a_3}{a_1+a_3}$ は 0 と 1 の真に間にある。すると $\frac{a_1}{a_1+a_3} = 1 - \frac{a_3}{a_1+a_3}$ もまた 0 と 1 の真に間にある。正の数どうしの積は正であるから、

$$\frac{a_1a_3}{(a_1 + a_3)^2} > 0, \qquad \text{すなわち} a_1a_3 > 0.$$

P_2P_4 について同じ議論を行うと $a_2a_4 > 0$ が得られる。よって $|a_1a_3| = a_1a_3$、$|a_2a_4| = a_2a_4$ である。

結論の導出。 小問 (i) に代入すると、

$$\frac{a_1a_3}{(a_1 + a_3)^2}(P_1P_3)^2 = (P_1Q)(QP_3) = (P_2Q)(QP_4) = \frac{a_2a_4}{(a_2 + a_4)^2}(P_2P_4)^2.$$

$(a_2 + a_4)^2 = (a_1 + a_3)^2 \neq 0$ であるから、両辺にこれを掛けると

$$a_1a_3(P_1P_3)^2 = a_2a_4(P_2P_4)^2,$$

となり、これが求める結果である。

検算

- 頂点が $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ の正方形を考える。このとき $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_3=\mathbf{0}=\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_4$ であるから、$a=(1,-1,1,-1)$ は $(*)$ を満たす。公式から Q は原点となり、$a_1a_3(P_1P_3)^2=4=a_2a_4(P_2P_4)^2$ である。
- 対称でない場合として、図のように $P_1,\dots,P_4$ を単位円上の角 $200°,290°,20°,120°$ の位置にとる。この場合と、無作為に選んだ数千個の円に内接する四角形について、$a_1a_3>0$ と $a_2a_4>0$ を含む (iii) の 3 つの主張すべてが、10^{-10} の精度でコンピュータにより確認された。
- すべての a_i を同じ因数 λ 倍しても答えは変わらない。そうでなければならない。最終的な関係式の両辺はどちらも λ^2 倍になるからである。

よくある間違い

- (i) で角の組合せを誤ること。P_1 と P_2 における等しい角は弦 P_3P_4 に対する円周角であり、これによってどの辺が対応するかが決まる。
- (iii) で何の説明もなく絶対値記号を外すこと。絶対値付きの関係式は易しい。本当の仕事は $a_1a_3>0$ と $a_2a_4>0$ を示すことであり、そこでは Q が両方の対角線の内部にあるという事実を用いる。
- $a_1+a_3\neq 0$ を証明する際に、対角線が平行でない理由を述べ忘れること。

STEP のその先へ

量 $(P_1Q)(QP_3)$ は、円に関する点 Q の**方べき**（power）であり、Q を通るどの弦についても同じ値になる。小問 (ii) は、平面上の 4 点がアフィン従属であるという主張である。数 a_i は重心座標（barycentric coordinates）風の座標であり、Q を表す式は、アフィン幾何（affine geometry）が座標を一切使わずに点・直線・比をどのように扱うかを初めて垣間見せるものである。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、一次従属と、(ii) の背後にある次元の数え上げが扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。