解答例

STEP III 2014、第 6 問

純粋数学 ・ 凸性による不等式

STEP III 2014、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q6

鍵となる考え方

ゼロから出発し、傾き（slope）もゼロで、グラフが上に曲がっている関数は、ゼロより大きくならなければならない。与えられた事実を 2 回積分すると、この図式がそのまま証明になる。問題の各不等式については、すべてを一方の辺に移項して $f(0) = f'(0) = 0$ を満たす関数 f をつくり、f'' が正であることを確かめればよい。本当の作業は、f'' が簡単な形になるように、適切な整理の仕方を選ぶことである。

解答

冒頭の結果

$0 < t < x_0$ において $f''(t) > 0$ であり、$f(0) = f'(0) = 0$ であるとする。$0 < x < x_0$ を満たす x を固定する。

$h = f''$ とおく。$0 < t < x$ において $f''(t) > 0$ であるから、与えられた結果より

$$f'(x) = f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

これは $(0, x_0)$ のすべての x について成り立つので、$0 < t < x_0$ において $f'(t) > 0$ である。

次に、今度は $h = f'$ として、与えられた結果を再び用いる。$0 < x < x_0$ のとき、$0 < t < x$ において $f'(t) > 0$ であるから

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

よって、$0 < t < x_0$ において $f(t) > 0$ であり、示すべきことが示された。以下では一

貫して $x_0 = \frac{1}{2}\pi$ としてこれを用いる。

小問 (i)

$f(x) = 1 - \cos x \cosh x$ とおく。すると $f(0) = 1 - 1 = 0$ であり、積の微分法（product rule）により

$$f'(x) = \sin x \cosh x - \cos x \sinh x, \qquad f'(0) = 0 - 0 = 0.$$

さらに微分すると、

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\cos x \cosh x + \sin x \sinh x) - (-\sin x \sinh x + \cos x \cosh x) \\ &= 2 \sin x \sinh x. \end{aligned}$$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ では $\sin x > 0$ かつ $\sinh x > 0$ であるから、$f''(x) > 0$ である。冒頭の結果により $f(x) > 0$、すなわち

$$\cos x \cosh x < 1 \qquad \text{ただし} 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

小問 (ii)

考えてみよう 冒頭の結果をどの関数に適用すればよいだろうか？$\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\cosh x}$ をそのまま使うのは煩雑に見える。

まず分数を払う。$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ では x、$\sin x$、$\sinh x$、$\cosh x$ はすべて正であるから、正の量を両辺に掛けても不等号の向きは変わらない。すると

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} \iff x < \sin x \cosh x, \qquad \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x} \iff \sin x \sinh x < x^2.$$

（1 つ目には $x \cosh x > 0$ を、2 つ目には $x \sinh x > 0$ を掛ける。）積 $\sin x \cosh x$ と $\sin x \sinh x$ はきれいに微分できる。これが、この形が適切である理由である。

左側の不等式。 $g(x) = \sin x \cosh x - x$ とおく。すると $g(0) = 0$ であり

$$g'(x) = \cos x \cosh x + \sin x \sinh x - 1, \qquad g'(0) = 1 + 0 - 1 = 0.$$

さらに微分すると、$\sin x \cosh x$ の項が打ち消し合う：

$$\begin{aligned} g''(x) &= (-\sin x \cosh x + \cos x \sinh x) + (\cos x \sinh x + \sin x \cosh x) \\ &= 2 \cos x \sinh x, \end{aligned}$$

となる。$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ では $\cos x > 0$ かつ $\sinh x > 0$ であるから、これは正である。（上限 $\frac{1}{2}\pi$ が効いてくるのはここである。）冒頭の結果により $g(x) > 0$ であるから、$x < \sin x \cosh x$、したがって $\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x}$ である。

右側の不等式。 $k(x) = x^2 - \sin x \sinh x$ とおく。すると $k(0) = 0$ であり

$$k'(x) = 2x - \cos x \sinh x - \sin x \cosh x, \qquad k'(0) = 0.$$

さらに微分すると、$\sin x \sinh x$ の項が打ち消し合う：

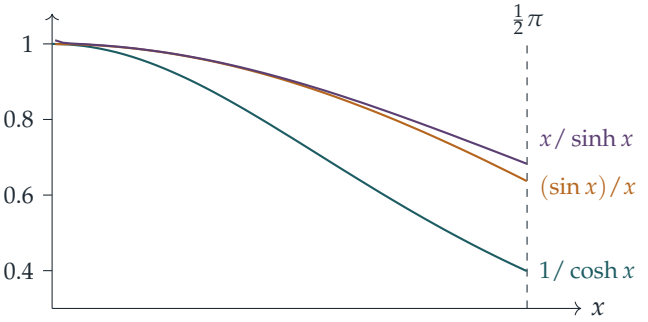
$$\begin{aligned} k''(x) &= 2 - (-\sin x \sinh x + \cos x \cosh x) - (\cos x \cosh x + \sin x \sinh x) \\ &= 2 - 2\cos x \cosh x. \end{aligned}$$

小問 (i) より、$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ において $\cos x \cosh x < 1$ であるから、そこで $k''(x) > 0$ である。冒頭の結果により $k(x) > 0$ であるから、$\sin x \sinh x < x^2$、したがって $\frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x}$ である。

2 つを合わせると、$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ において

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x},$$

が成り立ち、示すべきことが示された。



検算

- 級数（series）：$\cos x \cosh x = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots$ であるから、小さい x では確かに 1 をわずかに下回り、(i) と整合する。同様に $\frac{1}{\cosh x} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$、$\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$、$\frac{x}{\sinh x} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$ であるから、小さい x では左側の不等式は明らかであり、右側の不等式は次の項で決まる（x^4 の係数は $\frac{\sin x}{x}$ では $\frac{1}{120}$、$\frac{x}{\sinh x}$ ではそれより大きい $\frac{7}{360}$ である）。
- $x = 1$ のとき：$\cos 1 \cosh 1 \approx 0.834 < 1$、および $\frac{1}{\cosh 1} \approx 0.648 < \sin 1 \approx 0.841 < \frac{1}{\sinh 1} \approx 0.851$ である。
- $x = \frac{1}{2}\pi$ の近く、$x = 1.57$ では：3 つの値はおよそ 0.399、0.637、0.683 であり、$\cos x \cosh x \approx 0.002$ である。

よくある間違い

- 冒頭の結果を $\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\cosh x}$ そのものに適用すること。これは 0 では定義すらされず、導関数も扱いにくい。まず分母を払い、その際に掛ける因数がすべて正であることを確かめること。
- $f(0) = 0$ だけでなく $f'(0) = 0$ も確かめるのを忘れること。これがなければ冒頭の結果は適用できない。
- 2 つ目の不等式に小問 (i) が必要であることに気づかないこと。$k'' = 2 - 2\cos x \cosh x$ が正であるのは、まさに (i) による。

STEP のその先へ

冒頭の結果は、平均値の定理（mean value theorem）を用いた議論の一形態であり、「導関数が正である関数は増加する（increasing）」という事実を 2 回適用したものである。これは、凸関数（convex function）がその接線（tangent line）の上側にあること、ここでは原点における接線 $y = 0$ の上側にあることを述べている。この「二階導関数を比較する」手法は、初等関数の間の不等式を証明する標準的な方法である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、平均値の定理とその帰結を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。