解答例

STEP III 2014、第 5 問

純粋数学 ・ 図形における複素数

> **STEP III 2014、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q5

鍵となる考え方

複素平面（complex plane）において、「平行で長さが等しい」とは単に「変位ベクトル（displacement vector）として等しい」ということであり、反時計回り（anticlockwise）の 4 分の 1 回転は i を掛けることにあたる。したがって、この問題の幾何的な条件はすべて、頂点についての短い線形方程式になる。辺上の正方形については、辺の中点まで進み、そこから辺に垂直に外側へ辺の長さの半分だけ進むことで、それぞれの中心を求める。

解答

平行四辺形の判定条件

まず $a+c=b+d$ と仮定する。このとき

$$b-a=c-d \qquad \text{かつ} \qquad d-a=c-b,$$

であるから、変位 $\overrightarrow{AB}$ は $\overrightarrow{DC}$ に等しく、$\overrightarrow{AD}$ は $\overrightarrow{BC}$ に等しい。等しい変位は平行で長さも等しいから、2 組の対辺はどちらも平行で長さが等しい。すなわち $ABCD$ は平行四辺形（parallelogram）である。

逆に、$ABCD$ が平行四辺形であると仮定する。平行で長さの等しい 2 つの線分の変位は、等しいか互いに逆向きであるから

$$b-a=\varepsilon(c-d), \qquad d-a=\eta(c-b), \qquad \varepsilon,\eta\in\{1,-1\}.$$

である。$\varepsilon=1$ または $\eta=1$ ならば、いずれの式も整理すると $a+c=b+d$ となる。残る場合は $\varepsilon=\eta=-1$ のみであり、すなわち $b-a=d-c$ かつ $d-a=b-c$ である。

第1式から第2式を引くと $b-d=d-b$ となるので $b=d$ であるが、頂点は相異なるのでこれはありえない。よって $a+c=b+d$ であり、同値性（equivalence）が証明された。

正方形の判定条件

$ABCD$ を平行四辺形とし、$m=\frac{1}{2}(a+c)=\frac{1}{2}(b+d)$ を対角線（diagonal）の共通の中点（すなわち中心）とする。このとき

$$a-m=\tfrac{1}{2}(a-c),\qquad b-m=\tfrac{1}{2}(b-d),\qquad c-m=-(a-m),\qquad d-m=-(b-m).$$

である。

$ABCD$ が**正方形**（*square*）**ならば**、その対角線は長さが等しく、互いに直交して二等分し合うので、B は A を m のまわりに4分の1回転したものである。頂点は反時計回りに名づけられているので、この回転は反時計回りである。したがって $b-m=\mathrm{i}(a-m)$ であり、これは $\frac{1}{2}(b-d)=\frac{1}{2}\mathrm{i}(a-c)$、すなわち $\mathrm{i}(a-c)=b-d$ である。

逆に、$\mathrm{i}(a-c)=b-d$ ならば、$w=a-m\neq 0$ とおく。このとき

$$a-m=w,\quad b-m=\mathrm{i}w,\quad c-m=-w,\quad d-m=-\mathrm{i}w,$$

であるから、4つの頂点は w を m のまわりに 90° ずつ順に回転したものである。これらは正方形の頂点である（4辺はすべて $|w|\sqrt{2}$ であり、各辺は1つ前の辺に i を掛けたものである）。これで2つ目の同値性が証明された。

小問 (i)

頂点 P,Q,R,S は反時計回りに並ぶので、P から Q へ進むとき $PQRS$ の内部は左側にある。したがって PQ 上の外側の正方形は右側にある。

中心 X には、PQ の中点 $\frac{1}{2}(p+q)$ から、PQ に垂直に右へ距離 $\frac{1}{2}|q-p|$（辺の半分）だけ進むことで到達する。$q-p$ に $-\mathrm{i}$ を掛けると時計回り（clockwise）に 90° 回転する、すなわち右を向くので、この移動は $-\frac{1}{2}\mathrm{i}(q-p)$ である。よって

$$x=\tfrac{1}{2}(p+q)-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}(q-p)=\tfrac{1}{2}(p(1+\mathrm{i})+q(1-\mathrm{i})),$$

となり、題意が示された。

考えてみよう なぜ $-\mathrm{i}$ であって $+\mathrm{i}$ ではないのか？

$+\mathrm{i}$ を掛けると $\overrightarrow{PQ}$ は左へ回転し、四角形の内部を向くので、内側に作った正方形の中心が得られてしまう。内角はすべて 180° 未満なので、内部は各辺の左側に完全に含まれ、右側は確かに外側である。

小問 (ii)

小問 (i) を各辺に順に適用すると（どの辺も内部を左に見ながら進むので、同じ議論がすべての辺に通用する）、

$$2x = p(1+\mathrm{i}) + q(1-\mathrm{i}), \qquad 2y = q(1+\mathrm{i}) + r(1-\mathrm{i}),$$
$$2z = r(1+\mathrm{i}) + s(1-\mathrm{i}), \qquad 2t = s(1+\mathrm{i}) + p(1-\mathrm{i}).$$

となる。判定条件に現れる 2 つの式を比較する。

対頂点の和。

$$\begin{aligned} 2(x+z) - 2(y+t) &= (p+r)(1+\mathrm{i}) + (q+s)(1-\mathrm{i}) - (q+s)(1+\mathrm{i}) - (p+r)(1-\mathrm{i}) \\ &= 2\mathrm{i}\,(p+r-q-s), \end{aligned}$$

より

$$x + z - (y+t) = \mathrm{i}(p+r-(q+s)). \tag{1}$$

対角線。

$$2\mathrm{i}(x-z) = \mathrm{i}(p-r)(1+\mathrm{i}) + \mathrm{i}(q-s)(1-\mathrm{i}) = (p-r)(\mathrm{i}-1) + (q-s)(1+\mathrm{i}),$$
$$2(y-t) = (q-s)(1+\mathrm{i}) + (r-p)(1-\mathrm{i}) = (q-s)(1+\mathrm{i}) + (p-r)(\mathrm{i}-1).$$

これらは一致するので、

$$\mathrm{i}(x-z) = y-t \tag{2}$$

が**任意の**このような四角形 $PQRS$ について成り立つ。すなわち、線分 XZ と YT はつねに長さが等しく、直交する。

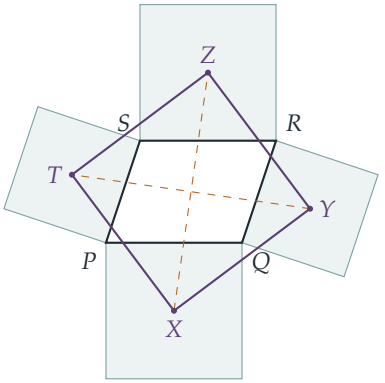
> **考えてみよう** (2) はつねに成り立つのだから、$XYZT$ が正方形であるかどうかを決めるのは何か？

平行四辺形の条件だけである。では、これらをまとめよう。

$PQRS$ が平行四辺形ならば、$p+r = q+s$ であるから、(1) より $x+z = y+t$ となり、最初の結果から $XYZT$ は平行四辺形である。(2) と合わせると、正方形の判定条件より $XYZT$ は正方形である。（この判定条件の逆向きの部分は頂点の名づけ方に関する仮定を必要としない。また $X \neq Z$ である。実際、$x = z$ とすると $r-p = \mathrm{i}(s-q)$ となり、$\overrightarrow{PR}$ は $\overrightarrow{QS}$ を**反時計回り**に 4 分の 1 回転したものになる。しかし反時計回りに名づけられた凸四角形（convex quadrilateral）では、$\overrightarrow{PR}$ はつねに $\overrightarrow{QS}$ を**時計回り**に 0° と 180° の間の角だけ回転し、拡大縮小したものである。）

$XYZT$ が正方形ならば、特に平行四辺形であるから、最初の結果より $x+z = y+t$ である。(1) より $\mathrm{i}(p+r-q-s) = 0$ となるので、$p+r = q+s$ であり、$PQRS$ は平行四辺形である。

よって、$XYZT$ が正方形であるための必要十分条件（if and only if）は、$PQRS$ が平行四辺形であることである。



検算

$p = 0$、$q = 4$、$r = 5 + 3\mathrm{i}$、$s = 1 + 3\mathrm{i}$ の平行四辺形をとる（上図）。公式より $x = 2 - 2\mathrm{i}$、$y = 6 + \mathrm{i}$、$z = 3 + 5\mathrm{i}$、$t = -1 + 2\mathrm{i}$ となる。$XYZT$ の辺は $4 + 3\mathrm{i}$、$-3 + 4\mathrm{i}$、$-4 - 3\mathrm{i}$、$3 - 4\mathrm{i}$ であり、それぞれ 1 つ前の辺の i 倍である。したがって 1 辺が 5 の正方形である。小問 (i) の検算として、$x = 2 - 2\mathrm{i}$ は確かに、PQ の下側にある頂点 0、4、$4 - 4\mathrm{i}$、$-4\mathrm{i}$ の正方形の中心である。ランダムに生成した数千個の凸四角形についてコンピュータで調べたところ、恒等式（identity）(2) はつねに成り立ち、また $XYZT$ が正方形になるのは $PQRS$ が平行四辺形であるときに限ることが確認された。

よくある間違い

- 小問 (i) で $+\mathrm{i}$ を用いてしまうこと。これでは正方形が四角形の内側にできる。
- 平行四辺形の判定条件で、「平行で長さが等しい」には $b - a = -(c - d)$ の場合も含まれ、それを除外しなければならないことを忘れること。
- 「必要十分」の一方向しか証明しないこと。小問 (ii) では「正方形 $\Rightarrow$ 平行四辺形」の向きは (1) だけで示せる。

STEP のその先へ

恒等式 (2) は van Aubel の定理（van Aubel's theorem）である。すなわち、任意の四角形について、向かい合う外側の正方形の中心を結ぶ線分は長さが等しく、直交する。これは一般的な原理の小さな例である。回転と中点から作られる幾何的な構成は頂点

についての線形写像（linear map）であるから、それらに関する定理は代数的な恒等式に帰着する（正三角形に関するナポレオンの定理（Napoleon's theorem）もその一例である）。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数の掛け算に対するこの幾何的な見方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。